

四元数在刚体定位 问题中的应用

〔苏〕B. H. 勃拉涅茨、И. П. 什梅格列夫斯基 著

梁振和 译

汪朝群 校

国防工业出版社

内 容 简 介

本书介绍了四元数这个数学工具在刚体旋转运动的运动学的一般理论问题中及其在控制系统设计中的应用。根据四元数的乘法运算提出了刚体的有限转动理论和角运动的运动学；探讨了运动学方程及其数值积分的研究问题、四元数在刚体角运动控制以及空间转弯最佳化问题中的应用问题；用例子证明了在控制问题中使用四元数的优点。

本书对于从事自动控制技术、飞行器运动控制系统设计以及从事刚体力学一般理论研究的读者，均有参考价值。

ПРИМЕНЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ В
ЗАДАЧАХ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский

Издательство «Наука» Москва 1973

四元数在刚体定位问题中的应用

〔苏〕В. Н. 勃拉涅茨、И. П. 什梅格列夫斯基 著

梁振和 译

汪朝群 校

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业许可登记证字第074号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

850×1168 1/32 印张 8 3/16 216 千字

1977年8月第一版 1977年8月第一次印刷 印数：0,001— 4,500 册

统一书号：15034·1534 定价：1.05 元

译 序

遵照伟大领袖毛主席关于“洋为中用”的教导，我们翻译出版了《四元数在刚体定位问题中的应用》这本书，供从事这方面工作的同志们参考。

四元数的数学概念是在十九世纪中叶提出来的，它是代数学中的一个内容。近些年来，随着控制理论、陀螺技术、计算技术的蓬勃发展，为了更简便地描述刚体的角运动，设计控制系统，采用了四元数这个数学工具，用它来弥补通常描述刚体角运动的三个欧拉参数（或类似的克雷洛夫参数等）在设计现代控制系统时的不足，当然问题的实质并没有发生变化。本书比较全面、系统地介绍了：四元数的基本概念，如何用四元数描述刚体的角运动以及它与经典的欧拉参数描述角运动方法之间的内在联系，也介绍了在实际设计控制系统中的应用，最后还提出了一个最佳控制的实际问题，虽然这个问题在最佳控制理论中是一个简单的实例，但也是很有意义的。

本书对于从事自动控制技术、飞行器控制系统设计的工程技术人员有一定的参考价值，对于从事一般刚体力学研究的读者，也能有所裨益。

由于我们水平所限，书中难免有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

译 者

目 录

译序	3
前言	6
第一章 四元数及其性质	9
§ 1.1 四元数代数	9
§ 1.2 四元数在球面上的表示	17
§ 1.3 旋转变换	23
§ 1.4 球面几何	28
第二章 刚体的有限转动理论	36
§ 2.1 正交变换	37
§ 2.2 正交变换的四元数乘法的表示式	45
§ 2.3 基的变换	48
§ 2.4 不变矢量的分量变换。超复数映像	50
§ 2.5 旋转运算的不变性。罗德里格-哈密顿参数	52
§ 2.6 转动的相加	56
§ 2.7 罗德里格-哈密顿参数同其它运动学参数的关系	63
第三章 运动学方程	77
§ 3.1 无限小变换。角速度矢量	77
§ 3.2 运动学方程的推导	81
§ 3.3 其它参数的运动学方程	87
§ 3.4 运动学方程的研究	100
§ 3.5 特殊形式的运动学方程的解	108
§ 3.6 运动学方程的形式解	117
第四章 运动学方程的近似积分和数值积分	121
§ 4.1 数值法的建立	121
§ 4.2 非规范化四元数的运动学方程。范数修正	126
§ 4.3 范数修正的数值法	128
§ 4.4 定步长情况下数值法的误差	132

§ 4.5	变步长的数值积分法	142
§ 4.6	量化误差	150
§ 4.7	泊松方程中模和角的稳定	152
第五章	四元数在刚体运动控制问题中的应用	157
§ 5.1	控制信号与运动学参数的关系	158
§ 5.2	惯性坐标系中定位的运动学问题	161
§ 5.3	旋转坐标系中定位的运动学问题	168
§ 5.4	定位的动力学问题	185
§ 5.5	例	187
第六章	刚体的最佳空间转弯	196
§ 6.1	运动学最佳转弯问题的提出	196
§ 6.2	运动学最佳转弯问题的解	200
§ 6.3	角速度矢量的模有界时的最佳控制	204
§ 6.4	角速度矢量的分量有界时的最佳控制	208
§ 6.5	动力学最佳转弯问题的提出	236
§ 6.6	控制力矩的模有界时, 对于球对称刚体动力学最佳转弯问题 的解的特殊情况	241
§ 6.7	补充说明	251
主要符号	256
参考资料	259

前 言

刚体角运动古典理论的主要结果是在上一个世纪取得的。为了描述刚体绕固定点的运动，曾提出诸如罗德里格-哈密顿参数、凯里-克莱茵参数、欧拉-克雷洛夫角和方向余弦之类的许多运动参数。当时，研究人员都致力于寻求方程的简便表示形式和探讨运动的可积分情况。此后，研究的重心移到陀螺的应用理论方面。这时，刚体的运动仅由欧拉-克雷洛夫角给定，后者在所有的力学著作中，其中包括研究运动对象控制的著作中，已经获得广泛的应用。此外，在理论著作中还采用了矩阵方法；这时，物体的状态由方向余弦给定。描述角运动的其它方法，主要是为了叙述的完整而提了一下。

在最近十来年里，情况发生了变化。飞行体控制系统的发展，数字计算机在运动控制中的应用，使得合理描述各种控制问题中刚体的空间运动有了实际意义。属于这类问题的，特别是建立捷联式惯性系统以及建立刚体空间转弯、定位和稳定控制系统。在这些问题中利用欧拉-克雷洛夫角有某些不便之处。任何一个角系统，本质上都是模拟某一常平架。在一定的角度下，会发生反映常平架框架的重合效应的运动学方程的退化。这种退化并不是由加给刚体角运动的实际物理限制引起的。此外，运动方程的积分和欧拉-克雷洛夫角坐标变换都涉及到三角运算，而这些运算会降低电子计算机的使用效率。

在所有的运动学参数中，罗德里格-哈密顿和凯里-克莱茵参

数占有特殊的地位。与欧拉角不同, 这些参数不论刚体处于任何状态都不会退化, 其数目等于四, 因此, 与方向余弦(有六个)不同, 它们只有一个连系方程。所有这一切都使运动学方程的数值积分问题得到简化。此外, 罗得里格-哈密顿和凯里-克莱茵参数使得有效地解决刚体有限旋转理论、受控运动稳定性等许多问题有了可能。尽管有这样的优点, 利用这些参数仍然是复杂的, 这是因为它要应用有限旋转矢量理论或者进行立体平面投影和没有简单几何意义的单式变换。而应用四元数能够建立使用罗得里格-哈密顿参数的极其方便和直观的形式体系。

1843 年, B.P 哈密顿首先在数学中引入四元数。从 1833 年起, 他开始研究他所建立的四元数理论, 力求为研究空间几何找到类似解决平面问题中我们以复数形式使用的那种简便方法。他的工作成果是两本书: “四元数讲义”^[55] 和 “四元数基础”^[54]。以后, 研究四元数理论的有 T. 甘凯里和 Φ . 克莱茵。但直到最近, 四元数还没有得到任何实际应用, 而是作为四维线性代数的形式数学模式的范例。

本书中介绍了作者应用四元数研究刚体角运动方面的有关工作。在以四元数乘法运算表示正交变换的基础上, 发展了正交变换和刚体有限转动理论的形式体系。并在建立四元数的形式体系同其它运动参数联系方面作了尝试。详细地研究了运动学方程的一般性质。提出了推导这些方程的一般方法, 这种方法适用于各种运动学参数并很好地说明了这些参数的物理意义。

利用四元数能够以统一的矢量形式来表示决定角速度矢量的无限小旋转以及作为有限转动的任意变换。四元数为研究刚体运动学提供了非常方便的工具, 原因是四元数单位具有两重性: 一方面, 它是实际三维空间的单位矢; 另一方面, 它又是变换算子。由

于四元数的这种性质，罗德里格-哈密顿和凯里-克莱茵参数得到了简单明了的物理内容。

本书还探讨了在控制刚体运动的实际课题中应用角运动运动学的问题。详细地研究了运动学方程的数值积分问题和运动学参数(特别是四元数元素)在控制中的应用问题，也探讨了空间转弯最佳化问题的若干特定情况。作者的目的在于说明在一般理论问题或刚体运动控制的实际问题中应用四元数这一数学工具的可能性，并使飞行器运动控制系统、捷联式系统方面工作的人们以及所有对刚体力学的一般问题感兴趣的人们，重视这一强有力的工具。

第一章 四元数及其性质

§ 1.1 四元数代数

将三维矢量代数运算推广到乘法和除法运算的必要性,促使哈密顿(1843年)建立了四维数或四元数的代数^[54, 55]。所谓四元数,是指由一个实数单位1和三个虚数单位 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 组成并具有下列形式实元的数:

$$\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_0 \mathbf{1} + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3。$$

我们先来叙述决定四元数运算的基本公设。

1) 如果两个四元数 Λ 和 \mathbf{M} 的诸元相等, 即 $\lambda_i = \mu_i (i=0, 1, 2, 3)$, 则这两个四元数相等。

2) 四元数 Λ 和 \mathbf{M} 之和为四元数, 其诸元为 $\lambda_i + \mu_i$:

$$\Lambda + \mathbf{M} = (\lambda_0 + \mu_0) \mathbf{1} + (\lambda_1 + \mu_1) \mathbf{i}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \mathbf{i}_2 + (\lambda_3 + \mu_3) \mathbf{i}_3$$

3) 当四元数 Λ 乘以标量 a 时, 其所有各元都乘以该数:

$$a\Lambda = a\lambda_0 \mathbf{1} + a\lambda_1 \mathbf{i}_1 + a\lambda_2 \mathbf{i}_2 + a\lambda_3 \mathbf{i}_3。$$

特别是, 四元数 Λ 的负数将是

$$-\Lambda = -\lambda_0 \mathbf{1} - \lambda_1 \mathbf{i}_1 - \lambda_2 \mathbf{i}_2 - \lambda_3 \mathbf{i}_3。$$

而零是四元数 $(0, 0, 0, 0)$ 。

从这些定义得出, 四元数加法以及四元数同标量的乘法都服从于一般代数规则:

$$4) \Lambda + \mathbf{M} = \mathbf{M} + \Lambda, (\Lambda + \mathbf{M}) + \mathbf{N} = \Lambda + (\mathbf{M} + \mathbf{N});$$

$$5) a\Lambda = \Lambda a, (ab)\Lambda = \Lambda(ba);$$

$$6) (a+b)\Lambda = a\Lambda + b\Lambda, a(\Lambda + \mathbf{M}) = a\Lambda + a\mathbf{M}。$$

● 哈密顿用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示三个虚数单位, 但是, 为了叙述上的方便, 我们利用甘凯里采用的符号: $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 。我们注意到, 可以把复数进一步推广到 λ , 本身亦为复数时的情况。这样构成的数称为双四元数, 并已用于描述刚体的螺旋运动。本书中不研究双四元数。

单位 $1, i_1, i_2, i_3$ 可以看成是用符号 \mathbf{H} 表示的四维空间中的矢量(单位矢)。于是, 任何四元数都可用点或矢径在该空间中表示出来。在空间 \mathbf{H} 中四元数的相加以及四元数同标量的相乘, 和在普通矢量空间中是一样的。空间 \mathbf{H} 的特点在于, 就乘法和除法运算来说, 它是封闭的。

7) 为了求出四元数之积, 必须给出单位 $1, i_1, i_2, i_3$ 的乘法规则。这些规则如下:

$$1 \circ i_1 = i_1 \circ 1 = i_1, 1 \circ i_2 = i_2 \circ 1 = i_2, 1 \circ i_3 = i_3 \circ 1 = i_3, 1 \circ 1 = 1,$$

$$i_1 \circ i_1 = -1, i_2 \circ i_2 = -1, i_3 \circ i_3 = -1,$$

$$i_1 \circ i_2 = -i_2 \circ i_1 = i_3, i_3 \circ i_1 = -i_1 \circ i_3 = i_2, i_2 \circ i_3 = -i_3 \circ i_2 = i_1。$$

在这样的乘法规则下, 两个四元数之积仍为四元数。

乘法规则是非常成功的, 由于有了这种乘法规则, 四元数代数包括实数和复数代数以及三维矢量代数●。

在三维空间中, 四元数含有具有唯一单位 1 的实数 $(a, 0, 0, 0)$ 、具有两个单位 $1, i$ 的复数 $(a, b, 0, 0)$ 和矢量 $(0, a, b, c)$ 。但若实数和复数构成数域(即经加法、乘法和除法重新给出所讨论的数集的元), 则两矢量之积, 正如下面将要证明的一样, 已经不是矢量, 而是四元数。

乘法规则 7) 表明, 乘以 1 不会使四元数改变, 就是说, 分量 1 保持普通标量的性质; 由于这种缘故, 以后在四元数的表达式中, 第一项 (λ_0) 将不写出单位。

其次, 可将单位 i_1, i_2, i_3 看作是三维矢量空间的单位矢●, 而将这些单位的系数看作是矢量的分量。因此, 我们将四元数表示为标量部分和矢量部分之和, 而这两部分分别用 $\text{sqal } \Lambda$ 和 $\text{vect } \Lambda$

● 当按上述规则定义了它的乘法后, 它就构成了实数域上的 4 阶不可易代数, 这一代数就称为四元代数。下述性质 7) 表明, 它还是一个可除代数, 即是一个广域。并且可以证明: 实数域和四元广域是实数域上仅有的可解的可除代数。——校者

● 因为若引入单位 i_4 的正交变换 $i'_j (i'_j = c_{jk} i_k)$, 则由正交性 $c_{jk} c_{kl} = \delta_{jl}$ 可以看到, i'_j 也服从于四元数单位的乘法规则:

$$i'_1 \circ i'_1 = -c_{14} c_{14} = -1, i'_2 \circ i'_2 = -c_{24} c_{24} + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = c_{11} i_1 + c_{12} i_2 + c_{13} i_3 = i'_1, \text{ 等等。}$$

表示,即

8) $\Lambda = \text{scal}\Lambda + \text{vect}\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$, 式中, 为方便起见, 矢量部分以普通矢量所采用的形式写出。

虚数单位的乘法规则, 利用下述图示法(图 1.1)是容易记住的: 按箭头排列的两个单位相乘时, 便得到带有正号的第三个单位; 当反向(逆着箭头)移动时, 单位便具有负号。

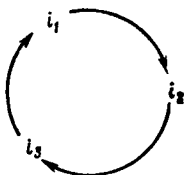


图 1.1

使两个四元数 Λ 和 \mathbf{M} 相乘, 则得:

$$\Lambda \circ \mathbf{M} = \lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3 + \lambda_0 (\mu_1 \mathbf{i}_1 + \mu_2 \mathbf{i}_2 + \mu_3 \mathbf{i}_3) + \mu_0 (\lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3) + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

如果改变相乘顺序, 即研究乘积 $\mathbf{M} \circ \Lambda$, 在乘法公式(1.1)中行列式则将改变, 就是说, 行 λ 和 μ 互换位置(即改变行列式的符号)。利用公式(1.1)可以证明乘法的基本性质。

9) 四元数乘法具有可结合性和对加法的分配性。

为了证明这一原理, 我们研究一下三个虚数单位的乘积, 因为对于实数单位这一性质是显而易见的。我们有:

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2) \circ \mathbf{i}_3 &= \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_3 = -1, & \mathbf{i}_1 \circ (\mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_3) &= \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_1 = -1, \\ (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{i}_2 &= -\mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_2 = 1, & \mathbf{i}_1 \circ (\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_2) &= -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_1 = 1, \\ (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2) \circ \mathbf{i}_1 &= \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2, & \mathbf{i}_1 \circ (\mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_1) &= -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2, \\ (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_1) \circ \mathbf{i}_2 &= -\mathbf{i}_2, & \mathbf{i}_1 \circ (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2) &= \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2, \\ (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{i}_1 &= -\mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_3, & \mathbf{i}_1 \circ (\mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_1) &= \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3, \\ (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_1) \circ \mathbf{i}_3 &= -\mathbf{i}_3, & \mathbf{i}_1 \circ (\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3) &= -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_3; \end{aligned}$$

其它乘积可用循环置换法同样地得出(从图 1.1 说明的乘法规则

7) 看出,这样做是可能的)。由此可见,对于任何四元数等式

$$(\Lambda \circ \mathbf{M}) \circ \mathbf{N} = \Lambda \circ (\mathbf{M} \circ \mathbf{N})$$

都是正确的。同样可以证明:

$$\Lambda \circ (\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \Lambda \circ \mathbf{M} + \Lambda \circ \mathbf{N}.$$

因为等式两端的乘积对应每一单位的分量都是相等的。

10) 四元数乘法是不可交换的; 只有当因子中的一个为标量或相乘因子的矢量部分成比例时,才可以交换因子。

实际上,研究乘法公式(1.1)可以看出,只有当行列式为零时,才有 $\Lambda \circ \mathbf{M} = \mathbf{M} \circ \Lambda$ 。而只有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 或 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, 就是说, Λ 或 \mathbf{M} 为标量时; 或 $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = a$, 即 $\lambda = a\mu$ 时, 行列式才可能为零。

从公式(1.1)也可得到

$$\text{sqal}(\Lambda \circ \mathbf{M}) = \text{sqal}(\mathbf{M} \circ \Lambda).$$

利用这个关系可以证明:

11) 当因子循环置换时,四元数乘积的标量部分不变。

研究等式

$$\begin{aligned} \text{sqal}[\Lambda \circ (\mathbf{M} \circ \mathbf{N})] &= \text{sqal}[(\mathbf{M} \circ \mathbf{N}) \circ \Lambda] = \\ &= \text{sqal}[\mathbf{M} \circ (\mathbf{N} \circ \Lambda)] = \text{sqal}[(\mathbf{N} \circ \Lambda) \circ \mathbf{M}], \end{aligned}$$

我们得到

$$\text{sqal}[\Lambda \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{N}] = \text{sqal}[\mathbf{M} \circ \mathbf{N} \circ \Lambda] = \text{sqal}[\mathbf{N} \circ \Lambda \circ \mathbf{M}], \quad (1.2)$$

12) 用 $\tilde{\Lambda}$ 表示的下列四元数是与给出的四元数 Λ 共轭的:

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda.$$

可以看出,同四元数之和共轭的四元数等于共轭四元数之和,

即

$$\widetilde{(\Lambda + \mathbf{M})} = \tilde{\Lambda} + \tilde{\mathbf{M}}.$$

因为四元数 Λ 和 $\tilde{\Lambda}$ 的矢量部分只是符号不同, 所以从性质

10) 可以得出

$$\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda.$$

这个乘积称为四元数 Λ 的范数并以 $\|\Lambda\|$ 表示。从乘法公式

(1.1) 得出:

$$13) \|\Lambda\| = \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

因此, 四元数的范数为标量; 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0 = 0$ 时, 也只能在这时 $\|\Lambda\| = 0$ 。当范数 $\|\Lambda\| = 1$ 时, 四元数称为规范化四元数。

研究乘积(1.1)可以看出, 当因子矢量部分的符号改变时, 含有 λ_0 和 μ_0 的矢量的符号也改变, 而行列式的符号不变。调换行列式中 λ 行和 μ 行的位置, 可得到矢量部分符号改变的四元数:

$(\Lambda \circ \tilde{\mathbf{M}})$; 显然, 它是从 $\tilde{\mathbf{M}}$ 同 $\tilde{\Lambda}$ 相乘得来的:

14) $(\Lambda \circ \tilde{\mathbf{M}}) = \tilde{\mathbf{M}} \circ \tilde{\Lambda}$, 即同两个四元数之积共轭的四元数等于这两个四元数共轭值以相反顺序所取之积。

利用上面得到的规则, 考虑到 $\|\mathbf{M}\|$ 为标量, 可以求出乘积范数之值:

$$15) \|\Lambda \circ \mathbf{M}\| = \Lambda \circ \mathbf{M} \circ (\Lambda \circ \tilde{\mathbf{M}}) = \Lambda \circ \mathbf{M} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \|\mathbf{M}\| \circ \tilde{\Lambda} \\ = \|\mathbf{M}\| \circ \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \|\mathbf{M}\| \circ \|\Lambda\|,$$

由此可见, 两个四元数之积的范数等于因子范数之积。

根据归纳法可以证明, 对于 n 个因子的情况来说, 14) 和 15) 两种性质依然不变:

$$(\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \cdots \circ \Lambda_n) = \tilde{\Lambda}_n \circ \tilde{\Lambda}_{n-1} \circ \cdots \circ \tilde{\Lambda}_1, \quad (1.3)$$

$$\|\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \cdots \circ \Lambda_n\| = \|\Lambda_1\| \|\Lambda_2\| \cdots \|\Lambda_n\| \quad (1.4)$$

由所得性质还能得出下列性质:

16) 仅在因子中的一个等于零时, 两四元数之积才等于零。

实际上, 如 $\Lambda \circ \mathbf{M} = 0$, 则 $\|\Lambda \circ \mathbf{M}\| = 0$, 于是 $\|\Lambda\| \|\mathbf{M}\| = 0$ 。因为 $\|\Lambda\|$ 和 $\|\mathbf{M}\|$ 为标量, 所以, 后一关系表明: 或者 $\|\Lambda\| = 0$, 或者 $\|\mathbf{M}\| = 0$, 这只有在 $\Lambda = 0$ 或 $\mathbf{M} = 0$ 时才有可能。从这一性质还可得出: 规范化四元数之积也是规范化四元数。

假定, 给出两个已知四元数 Λ 和 \mathbf{M} 并将四元数 \mathbf{N} 定义为 Λ 与 \mathbf{M} 的乘积, 即

● 对于双四元数来说, 这一点不能得到满足(这是因为双四元数存在着真零因子的缘故——校者)。

● 这个性质比较确切的应叙述为: 仅在相乘的因子中至少有一个为零时, 两四元数之积才等于零。——校者

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \circ \mathbf{M}.$$

在乘法公式(1.1)中使单位 i_1, i_2, i_3 的诸元相等, 我们有:

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= \lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3, \\ \nu_1 &= \lambda_0 \mu_1 + \lambda_1 \mu_0 + \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2, \\ \nu_2 &= \lambda_0 \mu_2 + \lambda_2 \mu_0 + \lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \mu_3, \\ \nu_3 &= \lambda_0 \mu_3 + \lambda_3 \mu_0 + \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

如果给出四元数 \mathbf{N} 和 \mathbf{A} (或 \mathbf{M}), 那么为了求出四元数 \mathbf{M} (或 \mathbf{A}), 必须确定四元数的除法运算。

就坐标而言, 这种运算同解线性代数方程组 (1.5) 求未知数 μ_i (或 λ_i) 是等价的; 如果方程组的行列式不等于零, 解方程组是可能的。

如果 \mathbf{A} 是不等于零的四元数, 即 $\|\mathbf{A}\| \neq 0$, 则根据范数定义 13) 得

$$\mathbf{A} \circ \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\|\mathbf{A}\|} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\|\mathbf{A}\|} \circ \mathbf{A} = 1.$$

17) 四元数 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\|\mathbf{A}\|}$ 称为四元数 \mathbf{A} 之逆, 它满足于下列等式:

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} = 1.$$

根据这一点, 在 \mathbf{M} 未知的情况下, 方程式 $\mathbf{N} = \mathbf{A} \circ \mathbf{M}$ 可用下列方法求解: 在该等式的左边各乘以 \mathbf{A}^{-1} , 因而得

$$\mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} \circ \mathbf{M} = \mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{N} = \frac{\tilde{\mathbf{A}} \circ \mathbf{N}}{\|\mathbf{A}\|}.$$

对于 \mathbf{A} 未知的情况来说, 我们用类似的方法得到

$$\mathbf{A} = \mathbf{N} \circ \mathbf{M}^{-1} = \frac{\mathbf{N} \circ \tilde{\mathbf{M}}}{\|\mathbf{M}\|}.$$

求出的解同线性方程组 (1.5) 的解相当。

应该注意到, 求 \mathbf{A} 和 \mathbf{M} 的公式是不对称的, 这同乘法的不可交换性有关。由于这种缘故, 不能将四元数除法写成 $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{A}}$ 或 $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{M}}$ 这种对称的形式。还要注意到, 得到的解是唯一的, 因为, 如果还

有一个解, 例如 $\mathbf{M}_1 = \Lambda^{-1} \circ \mathbf{N}$, 那么, $\Lambda \circ \mathbf{M}_1 = \Lambda \circ \mathbf{M}$, 即 $\Lambda \circ (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}) = 0$, 由此可见, $\mathbf{M}_1 - \mathbf{M} = 0$ [见 16)]。

性质 15) 表明, 如果 $\mathbf{M} = \Lambda^{-1} \circ \mathbf{N}$, 则就其范数来说满足于等式

$$\|\mathbf{M}\| = \frac{\|\mathbf{N}\|}{\|\Lambda\|}。$$

四元数乘积之逆可用下列方法求出:

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{N}}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{(\widetilde{\Lambda \circ \mathbf{M}})}{\|\Lambda \circ \mathbf{M}\|} = \frac{\tilde{\mathbf{M}} \circ \tilde{\Lambda}}{\|\mathbf{M}\| \circ \|\Lambda\|} = \mathbf{M}^{-1} \circ \Lambda^{-1}$$

和

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dots \circ \Lambda_n)^{-1} &= \frac{(\widetilde{\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dots \circ \Lambda_n})}{\|\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dots \circ \Lambda_n\|} \\ &= \Lambda_n^{-1} \circ \Lambda_{n-1}^{-1} \circ \dots \circ \Lambda_1^{-1}。 \end{aligned} \quad (1.6)$$

下面将研究具有零标量部分的四元数的乘积, 即“矢量”的乘积。根据乘法公式 (1.1), 我们得到

$$\lambda \circ \mu = -\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3 + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}。$$

所得乘积的标量部分和矢量部分等于:

$$\text{sqal}(\lambda \circ \mu) = -(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3)$$

和

$$\text{vect}(\lambda \circ \mu) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}。$$

为了得出三维基 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ (图 1.2) 的几何解释, 假定

$$\lambda = \lambda \mathbf{i}_1, \quad \mu = \mu (\mathbf{i}_1 \cos \vartheta + \mathbf{i}_2 \sin \vartheta)。$$

这些四元数之积等于

$$\lambda \circ \mu = \lambda \mu (-\cos \vartheta + \mathbf{i}_3 \sin \vartheta),$$

由此我们有

$$\text{sqal}(\lambda \circ \mu) = -\lambda \mu \cos \vartheta,$$

$$\text{vect}(\lambda \circ \mu) = \mathbf{i}_3 \lambda \mu \sin \vartheta。$$

研究轴 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 的右旋正交系 (见图 1.2) 可以看出, 普通矢

量代数^[28]中解释的两矢量的标量和矢量积分别等于:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \cdot \mu &= -\text{sqal}(\lambda \circ \mu), \\ \lambda \times \mu &= \text{vect}(\lambda \circ \mu). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

(点“ \cdot ”表示标量积,符号 \times 表示矢量积,而符号 \circ 表示四元数乘法)。

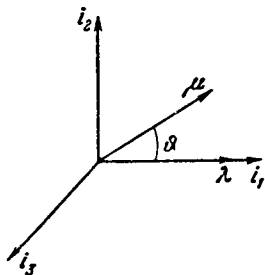


图 1.2

因子的位置互换不改变乘积的标量部分,而改变单位矢 i_3 的方向;由此可见:

$$\text{sqal}(\lambda \circ \mu) = \text{sqal}(\mu \circ \lambda), \quad \text{vect}(\lambda \circ \mu) = -\text{vect}(\mu \circ \lambda).$$

由所得关系式可以得到:

$$\left. \begin{aligned} 2\text{sqal}(\lambda \circ \mu) &= -2\lambda \cdot \mu = \lambda \circ \mu + \mu \circ \lambda, \\ 2\text{vect}(\lambda \circ \mu) &= 2\lambda \times \mu = \lambda \circ \mu - \mu \circ \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

我们利用标量积和矢量积的符号,将两个四元数的乘法公式(1.1)写成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \circ \mu &= -\lambda \cdot \mu + \lambda \times \mu, \\ \Lambda \circ \mathbf{M} &= \lambda_0 \mu_0 - \lambda \cdot \mu + \lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \lambda \times \mu. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

这些关系式建立了矢量代数与四元数代数之间的对应关系。

最后,我们研究三个矢量的乘法公式。

借助于(1.2),我们得到:

$$\text{sqal}(\lambda \circ \mu \circ \nu) = \text{sqal}(\mu \circ \nu \circ \lambda) = \text{sqal}(\nu \circ \lambda \circ \mu).$$

因为 $\widetilde{(\lambda \circ \mu \circ \nu)} = (-\nu) \circ (-\mu) \circ (-\lambda) = -\nu \circ \mu \circ \lambda$, 四元数与其共轭四元数的标量部分相同,而矢量部分符号不同,所以下列等式是正确的;

$$\begin{aligned}\text{sqa}(\widetilde{\lambda \circ \mu \circ \nu}) &= \text{sqa}(\lambda \circ \mu \circ \nu) = -\text{sqa}(\nu \circ \mu \circ \lambda), \\ \text{vect}(\widetilde{\lambda \circ \mu \circ \nu}) &= -\text{vect}(\lambda \circ \mu \circ \nu) = \text{vect}(\nu \circ \mu \circ \lambda).\end{aligned}$$

§ 1.2 四元数在球面上的表示

具有实元的任何四元数

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$$

都可表成下列形式:

$$\Lambda = \Lambda \left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} + \frac{\lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3}{\Lambda} \right) = \Lambda \left(\frac{\lambda_0}{\Lambda} + \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\Lambda} \right), \quad (1.10)$$

式中, $\Lambda = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \sqrt{\|\boldsymbol{\Lambda}\|} = |\boldsymbol{\Lambda}|$, 并称之为该四元数的张量。显然, 单位四元数的张量等于 1。量 $\frac{\lambda_0}{\Lambda} + \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\Lambda}$ 称为该四元数的回量; 回量的涵义将在以后解释, 现在我们仅指出, 它是一个范数等于 1 的四元数。我们引入一个按矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 定向的单位矢量 $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} = \frac{\lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}.$$

考虑到这一矢量, 回量的矢量部分可以写成下列形式:

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\Lambda} = \boldsymbol{\zeta} \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\Lambda}.$$

注意到, 回量的标量部分的平方与 $\boldsymbol{\zeta}$ 的系数平方之和为一, 我们引入下列变数:

$$\cos \vartheta = \frac{\lambda_0}{\Lambda}, \quad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\Lambda}, \quad 0 \leq \vartheta < \pi.$$

考虑到这些符号, 四元数(1.10)可用下列形式表示:

$$\Lambda = \Lambda (\cos \vartheta + \boldsymbol{\zeta} \sin \vartheta). \quad (1.11)$$

在四元数表达式(1.11)中, 角 ϑ 的符号取决于单位矢量 $\boldsymbol{\zeta}$ 的符号选择, 即其方向的选择(实际上, 在 $\boldsymbol{\zeta}$ 和 $\sin \vartheta$ 的表达式中都应标上符号 \pm); 但这里我们暂不确定选择角 ϑ 正方向和单位矢量 $\boldsymbol{\zeta}$ 正方向的唯一性。

公式(1.11)中四元数的表示是方便的, 因为这种表示方法便于求出方程 $\Lambda^n = \mathbf{M}$ 的根。实际上, 由于 $\boldsymbol{\zeta} \circ \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^2 = -1$ (我们假定

通过计算直接证明了这一点), 所以

$\Lambda^2 = \Lambda \circ \Lambda = \Lambda^2(\cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta)^2 = \Lambda^2(\cos 2\vartheta + \zeta \sin 2\vartheta)$, 而且穆阿伏尔公式

$$\Lambda^n = \Lambda^n(\cos n\vartheta + \zeta \sin n\vartheta)$$

对于任何次幂 n 都是正确的●。

当矢量 μ 的指向与矢量 ζ 相同时, 解方程 $\Lambda^n = \mathbf{M}$ 是可能的; 在此种情况下, 解本身同复数论中相似的方程的解类似, 因此, 我们不在这里讨论。

以公式 (1.11) 表示四元数还可以得到直观的四元数几何解释。

我们研究规范化四元数

$$\Lambda = \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta。$$

该四元数可表示为满足下列条件的某两个矢量之积 $b \circ a^{-1}$:

- 1) $a = b, a = \sqrt{\|a\|}, b = \sqrt{\|b\|}$;
- 2) 矢量 a 和 b 之间的交角等于 ϑ ;
- 3) 平面 ab 垂直于单位矢量 ζ ;
- 4) 矢量 a, b, ζ 构成轴的右旋坐标系 (图 1.3)。

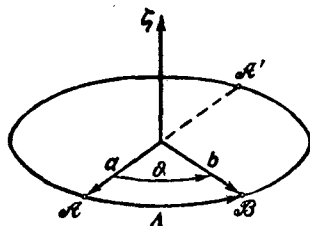


图 1.3

考虑到性质 1) 可写成

$$\Lambda = \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta = \frac{ab \cos \vartheta + \zeta ab \sin \vartheta}{\|a\|}。$$

量 $ab \cos \vartheta$ 和 $\zeta ab \sin \vartheta$ 可分别用标量积 $a \cdot b$ 和矢量积 $a \times b$ 来表示 (在右旋坐标系中矢量积的结果按矢量 ζ 定向)。

● 这个公式的推导与复数域中棣莫弗公式: $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ 的推导完全类似。——校者

依此, 我们得到

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{-\text{sqal}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) + \text{vect}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= -\frac{\text{sqal}(\mathbf{b} \circ \mathbf{a}) + \text{vect}(\mathbf{b} \circ \mathbf{a})}{\|\mathbf{a}\|} = -\frac{\mathbf{b} \circ \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{b} \circ \tilde{\mathbf{a}}}{\|\mathbf{a}\|} \\ &= \mathbf{b} \circ \mathbf{a}^{-1}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

从图 1.3 中可以看出, 当矢量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 ζ 构成右旋坐标系时, 从正轴 ζ 观察的情况下, 角 $\vartheta < \pi$ 应逆时针方向从 \mathbf{a} 向 \mathbf{b} 计算。这里选择的单位矢量 ζ 的正方向以及与之相应的角 ϑ 的正方向, 只能由矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的矢量乘法规则给定; 原则上, 也可取相反方向来计算角 ϑ , 等等。但在下面我们将遵循这里规定的条件。

从关系式 (1.12) 得出, 具有正角 ϑ 的方向并将矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 端点连接起来的球面(半径 $a=b$)的大圆弧, 可与每个规范化四元数 Λ 对应(见图 1.3)。因此, 四元数 Λ 可单值地用大圆的弧 $\text{arc} \Lambda$ 表示, 弧 Λ 所在的平面取决于矢量 ζ , 而弧长取决于角 ϑ 。四元数的方向由矢量 ζ 的方向确定; 弧 Λ 在其大圆上的位置是任意的, 就是说, 弧是滑动的(具有任意的计算起点)。

现在我们研究某些特定情况。

当 $\vartheta=0$ 或 $\vartheta=\pi$ 时, 相应地四元数 $\Lambda=1$ 或 $\Lambda=-1$, 而矢量 ζ 可具有任意方向; 这种情况是特殊的, 因为 $\Lambda=1$ 相当于球面上的任意一点, 而 $\Lambda=-1$ 相当于圆的任意一半。大圆的四分之一相当于单位矢量 ζ 。如果 $\text{aro} \Lambda = \mathcal{AB}$ 对应于四元数 Λ , 等于弧 \mathcal{BA} (即等于反向弧, 因为, 在这种情况下, 弧的这个方向对于矢量 ζ 是正的)的 $\text{arc} \Lambda$ 则对应于逆四元数, 即共轭四元数 $\Lambda^{-1} = \tilde{\Lambda} = \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta$ 。与四元数 $-\Lambda$ 对应的是

$$-\cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta = \cos(\pi - \vartheta) - \zeta \sin(\pi - \vartheta),$$

即从径对称点 \mathcal{A}' 到点 \mathcal{B} 的弧 $\mathcal{A}'\mathcal{B}$ (见图 1.3)。

下面, 我们研究四元数乘法运算并找出它在球面上的表示。

假定给出单位四元数 Λ 和 \mathbf{M} 。这两个四元数可用 (1.11) 的形式和相应长度的大圆弧的形式来表示。四元数的弧 $\text{arc} \Lambda$ 位

于同矢量 λ 垂直的大圆上; 弧 $\text{arc } \mathbf{M}$ 位于矢量 μ 决定的大圆上 \bullet 。我们将弧 $\text{arc } \Lambda$ 的终点和弧 $\text{arc } \mathbf{M}$ 的起点置于这两个圆的交点 \mathcal{A} 上(图 1.4)。

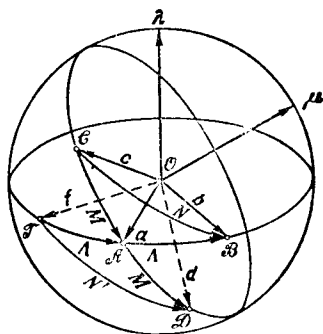


图 1.4

引入矢量 a, b, c , 我们得到

$$\Lambda = b \circ a^{-1}, \quad \mathbf{M} = a \circ c^{-1}.$$

连接点 C 和 B 的大圆弧决定着某一四元数 $\mathbf{N} = b \circ c^{-1}$ 。显然,

$$\mathbf{N} = b \circ c^{-1} = b \circ a^{-1} \circ a \circ c^{-1} = \Lambda \circ \mathbf{M},$$

即球面上各弧的几何加法运算相当于各四元数的乘积: $\text{arc } \mathbf{M} + \text{arc } \Lambda = \text{arc } (\Lambda \circ \mathbf{M})$ 。

因为四元数 Λ 为球面上的滑动弧, 所以, Λ 也等于 $a \circ f^{-1}$ (角 $\mathcal{T}OA$ 和 AOB 相等并依角 ϑ 而定); 同理, $d \circ a^{-1}$ 相当于四元数 \mathbf{M} ; 由此得出, 表示四元数 $\mathbf{N}' = \mathbf{M} \circ \Lambda$ 的弧 $\mathcal{T}D$ 相当于乘积 $\mathbf{M} \circ \Lambda = d \circ a^{-1} \circ a \circ f^{-1} = d \circ f^{-1}$, 即 $\text{arc } \Lambda + \text{arc } \mathbf{M} = \text{arc } (\mathbf{M} \circ \Lambda)$ 。

在这里, 可以特别明显地看出, 四元数乘法运算时交换因子所发生的情况。

当三个大圆弧 Λ, \mathbf{M} 和 \mathbf{N} 几何相加时, 用类似方法可以得到(图 1.5):

$$\text{arc } \mathbf{N} + \text{arc } \mathbf{M} + \text{arc } \Lambda = \text{arc } (\Lambda \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{N}),$$

这是因为

\bullet $\text{arc } \mathbf{M}$ 位于同矢量 μ 垂直的大圆上。——校者

$$\begin{aligned}\Lambda &= a \circ b^{-1}, \quad M = b \circ c^{-1}, \\ N &= c \circ d^{-1}, \quad \Lambda \circ M \circ N = a \circ d^{-1}.\end{aligned}$$

因此, 每个大圆弧都由一个四元数给定的若干个大圆弧的矢量和, 给出一个由这些四元数相反顺序的乘积所决定的大圆弧。

从等于一的四元数相当于球面上的一点这样的条件可以得出如下结论: 对于闭合球面三角形来说, 有

$$\text{arc } N + \text{arc } M + \text{arc } \Lambda = 0,$$

即

$$\text{arc } \Lambda \circ M \circ N = 0 \quad \text{和} \quad \Lambda \circ M \circ N = 1.$$

在一般情况下, 当

$$\Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \cdots \circ \Lambda_1 = 1$$

时, 也只能在这时, 表示循环排列的四元数 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ 的弧构成闭合多边形。

前面所介绍的以球面上的弧表示四元数的方法, 在许多场合下都是极其有益的。

我们以球面三角形三角公式的推导作为例子。假定对三角形(图 1.6)给出:

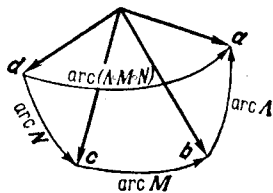


图 1.5

$$\left. \begin{aligned}\text{arc } \Lambda + \text{arc } M &= \text{arc } N = \text{arc } M \circ \Lambda, \\ \Lambda &= a \circ b^{-1} = \cos \alpha + \lambda \sin \alpha, \\ M &= c \circ a^{-1} = \cos \beta + \mu \sin \beta, \\ N &= c \circ b^{-1} = \cos \gamma + \nu \sin \gamma,\end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

式中, α, β, γ 分别为四元数 Λ, M 和 N 的弧长。因为 $N = M \circ \Lambda$, 即 $c \circ b^{-1} = (c \circ a^{-1}) \circ (a \circ b^{-1})$, 所以,

$$(\cos \beta + \mu \sin \beta) \circ (\cos \alpha + \lambda \sin \alpha) = \cos \gamma + \nu \sin \gamma.$$

我们发现:

$$\mu \circ \lambda = -\mu \cdot \lambda + \mu \times \lambda = -\lambda \cdot \mu - \lambda \times \mu = \cos \mathcal{A} - a \sin \mathcal{A},$$

式中 $(\pi - \mathcal{A})$ 是矢量 μ 和 λ 之间的交角, 就是说, 三角形的顶角 a 等于 \mathcal{A} (见图 1.6)。

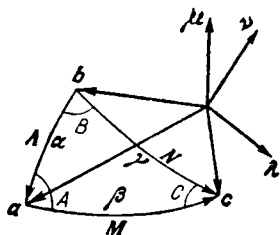


图 1.6

进行乘法运算(1.13)并使标量部分相等, 便立即得出已知的余弦公式

$$\cos \gamma = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha \cos \mathcal{A}.$$

使乘积的矢量部分相等, 则得:

$$\mu \sin \beta \cos \alpha + \lambda \sin \alpha \cos \beta - \mathbf{a} \sin \mathcal{A} \sin \beta \sin \alpha = \nu \sin \gamma.$$

将所得等式同 \mathbf{a} 进行内积相乘, 由于 $\mathbf{a} \cdot \mu = \mathbf{a} \cdot \lambda = 0$ 和 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$, 我们得到

$$\sin \mathcal{A} \sin \beta \sin \alpha = -\mathbf{a} \cdot \nu \sin \gamma = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

因为 $\nu \sin \gamma = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ 。可见,

$$\frac{\sin \mathcal{A}}{\sin \gamma} = \frac{-\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

当矢量和角循环置换时●, 等式右边的乘积不变, 因而我们得到已知的正弦定理

$$\frac{\sin \mathcal{A}}{\sin \gamma} = \frac{\sin \mathcal{B}}{\sin \beta} = \frac{\sin \mathcal{C}}{\sin \alpha}.$$

● 由 $\mathbf{M} = -\mathbf{N} \circ \mathbf{A}$ 可类似地得出: 余弦公式

$$\cos \beta = \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos \mathcal{B} \quad \text{和} \quad \frac{\sin \mathcal{B}}{\sin \beta} = \frac{-\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

再由 $\mathbf{A} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ 类似地推得: 余弦公式

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \mathcal{C} \quad \text{和} \quad \frac{\sin \mathcal{C}}{\sin \alpha} = \frac{-\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

又因为:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

故下列正弦公式成立。这里得到的正弦公式和三个余弦公式与球面三角形中相应的公式是一致的。——校者

§ 1.3 旋 转 变 换

四元数代数使我们能够以简便的形式来表示空间中的有限转动(变换)。这种表示是以下列基本定理^[26, 49, 66]为依据的。

定理 1.1 令 Λ 和 \mathbf{R} 为非标量四元数; 在此种情况下, 量

$$\mathbf{R}' = \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1} \quad (1.14)$$

为四元数, 其范数和标量部分等于四元数 \mathbf{R} 的范数和标量部分。vect \mathbf{R} 绕轴 vect Λ 沿锥面旋转二倍角 Λ , 便得到矢量部分 vect \mathbf{R}' 。这样, 若

$$\Lambda = \Lambda \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + \zeta \sin \frac{\vartheta}{2} \right),$$

使 vect \mathbf{R} 绕轴 ζ 旋转一角度 ϑ , 便得到 vect \mathbf{R}' 。

证明 根据范数的性质, 对于范数 \mathbf{R}' 我们得到

$$\|\mathbf{R}'\| = \|\Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1}\| = \|\Lambda\| \|\mathbf{R}\| \|\Lambda^{-1}\| = \|\mathbf{R}\| \|\Lambda\| \|\Lambda\|^{-1} = \|\mathbf{R}\|. \quad (1.15)$$

同理, 利用性质(1.2), 我们得到

$$\text{sqal } \mathbf{R}' = \text{sqal } (\Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1}) = \text{sqal } (\Lambda^{-1} \circ \Lambda \circ \mathbf{R}) = \text{sqal } \mathbf{R}. \quad (1.16)$$

另外, 将 \mathbf{R} 写成 $\mathbf{R} = r_0 + \mathbf{r}$ 的形式, 我们就得到下列形式的(1.14)式:

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1} &= \Lambda \circ r_0 \circ \Lambda^{-1} + \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \Lambda^{-1} \\ &= r_0 + \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \Lambda^{-1} = r_0 + \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (1.17)$$

和

$$\mathbf{R}' = r_0 + \mathbf{r}',$$

就是说, 运算(1.14)仅仅改变四元数 \mathbf{R} 的矢量部分:

$$\text{vect}(\Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1}) = \Lambda \circ (\text{vect } \mathbf{R}) \circ \Lambda^{-1}$$

或者

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \Lambda^{-1}. \quad (1.18)$$

我们来确定四元数(1.17)矢量部分的变换特性。以(1.11)的形式来表示四元数 \mathbf{R} , 即

$$\mathbf{R} = |\mathbf{R}| (\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi) = \mathbf{R} (\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi).$$

于是, 根据(1.17), 我们有

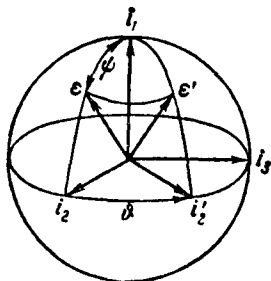


图 1.7

$$\begin{aligned}\text{vect } \mathbf{R}' = \mathbf{r}' &= \Lambda \circ (\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon} \sin \varphi) \circ \Lambda^{-1} \\ &= \mathbf{R} \sin \varphi (\Lambda \circ \boldsymbol{\varepsilon} \circ \Lambda^{-1}) = \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}' \sin \varphi.\end{aligned}$$

为了指明单位矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 变换的几何性质, 假定(图1.7)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{i}_1 \cos \psi + \mathbf{i}_2 \sin \psi,$$

而四元数 Λ 的矢量指向轴 \mathbf{i}_1 , 即 $\zeta = \mathbf{i}_1$, 在这种情况下, 有

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \Lambda \circ \boldsymbol{\varepsilon} \circ \Lambda^{-1} = (\Lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \Lambda^{-1}) \cos \psi + (\Lambda \circ \mathbf{i}_2 \circ \Lambda^{-1}) \sin \psi.$$

因为 $\text{vect } \Lambda$ 和 \mathbf{i}_1 平行, 所以, $\Lambda \circ \mathbf{i}_1 \circ \Lambda^{-1} = \Lambda \circ \Lambda^{-1} \circ \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1$ 。对于 \mathbf{i}_2 , 我们有

$$\begin{aligned}\Lambda \circ \mathbf{i}_2 \circ \Lambda^{-1} &= \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \circ \mathbf{i}_2 \circ \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\ &= \left(\mathbf{i}_2 \cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \\ &= \mathbf{i}_2 \left(\cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) + \mathbf{i}_3 \left(2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \right),\end{aligned}$$

即单位矢 \mathbf{i}_2 变为单位矢

$$\mathbf{i}_2' = \mathbf{i}_2 \cos \vartheta + \mathbf{i}_3 \sin \vartheta,$$

这个单位矢是如此得到的, 即: 使单位矢 \mathbf{i}_2 绕轴 \mathbf{i}_1 (即绕 ζ) 按正向旋转一角度 ϑ 。相应地, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{i}_1 \cos \psi + \mathbf{i}_2 \sin \psi$ 变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{i}_1 \cos \psi + \mathbf{i}_2' \sin \psi,$$

就是说, 绕轴 ζ 沿锥面旋转一角度 ϑ 。

● 原书误为: $\dots + \mathbf{i}_3 \left(2 \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$ 。——校者

因此证明, 在变换(1.14)时 \mathbf{R} 的矢量部分是绕轴 $\text{vect } \mathbf{\Lambda}$ 沿锥面旋转的。

运算(1.14)仅仅改变四元数的矢量部分, 因此, 可把它看成是矢量 \mathbf{r} 变换成 \mathbf{r}' 的运算(以(1.18)的形式写出)。既然四元数的范数不会由于变换(1.15)而改变(见(1.15)式), 所以矢量长(即它的模数 $r = \sqrt{\|\mathbf{R}\| - r_0^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$)也保持不变:

$$r' = \sqrt{\|\mathbf{R}'\| - (r'_0)^2} = \sqrt{\|\mathbf{R}\| - r_0^2} = r.$$

由此可见, 变换(1.18)是正交变换。根据欧拉定理^[16], 任何正交变换都是绕某一轴的旋转。变换(1.18)可立即确定该旋转轴: 这个轴就是 $\text{vect } \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}$, 因为, 只有这个轴不列为下列变换所改变:

$$\mathbf{\Lambda}' = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_0.$$

根据这一点, 我们将运算(1.18)和(1.14)称之为旋转运算(旋转变换)。

下面我们给出变换(1.14)的坐标表达式。假定

$$\mathbf{R} = r_0 + r_1 \mathbf{i}_1 + r_2 \mathbf{i}_2 + r_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{R}' = r'_0 + r'_1 \mathbf{i}_1 + r'_2 \mathbf{i}_2 + r'_3 \mathbf{i}_3$$

和

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3.$$

完成乘法(1.14)并使四个单位的各项相等, 便得到以四元数 \mathbf{R} 分量的线性函数表示的四元数 \mathbf{R}' 的分量:

$$\left. \begin{aligned} r'_0 &= r_0, \\ r'_1 &= \frac{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\Lambda^2} r_1 + \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3)}{\Lambda^2} r_2 + \frac{2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)}{\Lambda^2} r_3, \\ r'_2 &= \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3)}{\Lambda^2} r_1 + \frac{\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2}{\Lambda^2} r_2 + \frac{2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1)}{\Lambda^2} r_3, \\ r'_3 &= \frac{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2)}{\Lambda^2} r_1 + \frac{2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1)}{\Lambda^2} r_2 + \frac{\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\Lambda^2} r_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

可以验证, 四元数矢量部分的分量变换行列式等于一。

当表示旋转变换的四元数 $\mathbf{\Lambda}$ 为规范化四元数($\|\mathbf{\Lambda}\| = \Lambda^2 = 1$ 和

● 原书误为 \mathbf{R}' 。——校者

$\Lambda^{-1}=\tilde{\Lambda}$ 时, 运算(1.14)和(1.18)写成如下形式●:

$$\mathbf{R}'=\Lambda\circ\mathbf{R}\circ\tilde{\Lambda}, \quad \mathbf{r}'=\Lambda\circ\mathbf{r}\circ\tilde{\Lambda}. \quad (1.20)$$

假定 $\Lambda=\cos\frac{\vartheta}{2}+\zeta\sin\frac{\vartheta}{2}$ 为规范化四元数。形式 $\Lambda\circ(\)\circ\tilde{\Lambda}$ 可

以看成是由四元数 Λ 给出的旋转算子; 所谓由 Λ 确定的旋转变换, 我们理解正是这个算子; 我们还可这样说, 当把(1.20)理解为这个算子时, 四元数 Λ 将给出角度为 ϑ 的旋转。

算子 $\Lambda\circ(\)\circ\tilde{\Lambda}$ 确定角度为 ϑ 的旋转; 我们来研究四元数 $\{-\Lambda\}$; 因为 $(-\tilde{\Lambda})=-\tilde{\Lambda}$, 所以, 旋转 $\Lambda\circ(\)\circ\tilde{\Lambda}$ 和 $(-\Lambda)\circ(\)\circ(-\tilde{\Lambda})$ 给出同一结果。

四元数

$$-\Lambda=\cos\left(\pi-\frac{\vartheta}{2}\right)+(-\zeta)\sin\left(\pi-\frac{\vartheta}{2}\right)$$

给出以角度 $2\pi-\vartheta$ 绕轴 $-\zeta$ 的旋转, 即反向的旋转; 由此可以更清楚地看出, 这种旋转的结果与以角度 ϑ 绕轴 ζ 旋转的结果完全相同。

因为旋转 $\tilde{\Lambda}\circ\Lambda\circ(\)\circ\tilde{\Lambda}\circ\Lambda=1\circ(\)\circ 1$, 所以旋转 $\tilde{\Lambda}\circ(\)\circ\Lambda$ 给出角度为 ϑ 的反向旋转。其实这是显而易见的, 因为

$$\tilde{\Lambda}=\cos\frac{\vartheta}{2}-\zeta\sin\frac{\vartheta}{2}=\cos\left(-\frac{\vartheta}{2}\right)+\zeta\sin\left(-\frac{\vartheta}{2}\right).$$

假定规范化四元数 Λ 给出以角度 ϑ 绕轴 λ 的旋转, 而规范化四元数 \mathbf{M} 给出以角度 γ 绕轴 μ 的旋转。旋转顺序 Λ 和 \mathbf{M} 相应于算子。

$$\mathbf{M}\circ\Lambda\circ(\)\circ\tilde{\Lambda}\circ\tilde{\mathbf{M}}=(\mathbf{M}\circ\Lambda)\circ(\)\circ(\widetilde{\mathbf{M}\circ\Lambda}). \quad (1.21)$$

因为 $\mathbf{M}\circ\Lambda$ 也是规范化四元数, 比方说,

$$\mathbf{M}\circ\Lambda=\cos\frac{\psi}{2}+\nu\sin\frac{\psi}{2},$$

所以, 两次顺序旋转的结果同以角度 ψ 绕轴 ν 的一次旋转是等价的; 合成旋转的轴和角可以根据由乘法规则(1.5)得到的合成四元

● 当 Λ 不是单位四元数时, 变换(1.20)便给出通用的空间变换形式: 旋转和伸缩(后者之值取决于 Λ^2)。

由此, 称 Λ 为空间张量, 而 Λ/Λ 为回量; 但现在不用这些名称, 因为张量的概念包括更广泛的涵义。以后我们将值 Λ 称为四元数的模数。

数分量求出。

可见, 旋转 Λ 以及随之进行的旋转 \mathbf{M} 同一次旋转 $\mathbf{M} \circ \Lambda$ 是等价的。在更一般的情况下, 顺序旋转 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ 和一次旋转 $\Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \dots \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1$ 是等价的。

我们来研究某些特例。

如果 $\Lambda = \lambda$, 即 $\vartheta = 90^\circ$, 那么, 使 \mathbf{e} 绕轴 λ 沿锥面旋转 180° , 便得到矢量

$$\mathbf{e}' = \lambda \circ \mathbf{e} \circ \tilde{\lambda} = -\lambda \circ \mathbf{e} \circ \lambda.$$

可见, 变换 $-\lambda \circ () \circ \lambda$ 可给出相对于轴 λ 同原始矢量对称的矢量 (图 1.8)。变换 $\lambda \circ () \circ \lambda$ 可给出同矢量 $-\lambda \circ () \circ \lambda$ 相反的矢量, 就是说, 可以看成是矢量相对于垂直 λ 的平面的镜反射。

由矢量 λ 和 μ 决定的顺序镜反射 [即顺序旋转 $\lambda \circ () \circ \lambda$ 和 $\mu \circ () \circ \mu$] 等价于给出旋转的一个算子

$$\mu \circ \lambda \circ () \circ \lambda \circ \mu = \mu \circ \lambda \circ () \circ (\mu \circ \lambda)^{-1}.$$

但因 $\mu \circ \lambda = -\mu \cdot \lambda - \lambda \times \mu$, 所以

$$\mu \circ \lambda = -\cos \varphi - \mathbf{b} \sin \varphi = -(\cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi),$$

式中, φ 是矢量 λ 和 μ 之间的交角。

由此可见, 相对于两个平面的两次顺序镜反射同绕该两平面交线、以两平面间交角的两倍角旋转的结果是等价的。

单位四元数可用单位球面的大圆弧表示, 该球的极点是四元数的矢量, 回忆这一情况便可看出, 旋转运算可给出绕该极点两倍角 (即两倍弧) 的转动。

现在我们研究球面多边形; 假定其先后 (循环) 绕过的各边表示四元数 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$; 根据 § 1.2 的结果, 我们有

$$\Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \dots \circ \Lambda_1 = 1.$$

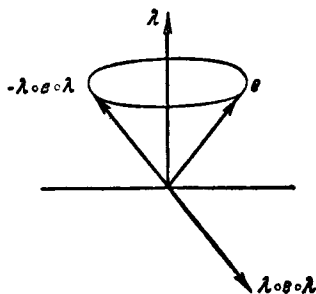


图 1.8

由于 $(\Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \cdots \circ \Lambda_1) = 1$, 所以, 算子

$$\Lambda_n \circ \Lambda_{n-1} \circ \cdots \circ \Lambda_1 \circ () \circ \tilde{\Lambda}_1 \circ \tilde{\Lambda}_2 \circ \cdots \circ \tilde{\Lambda}_n = 1 \circ () \circ 1,$$

就是说, $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ 这样的顺序旋转给出原始状态。由此可以得出哈密顿-敦金定理:

如果 \mathcal{ABC} 为某一球面三角形, 那么, 取决于弧 $2BC, 2CA$ 和 $2AB$ (即相对于其极轴) 的三个顺序旋转, 则使物体回到原始状态。

§1.4 球面几何

得出超复数单位的乘法规则是十分自然的, 因为虚数单位的平方等于 -1 , 而乘积 $i_1 \circ i_2$ 只能假定等于 i_3 ; 其它的乘法规则是由乘法的结合律得到的●。

这些规则决定的量具有双重涵义: 一方面, 这是某些几何形象 (四维空间中的矢量); 另一方面, 这是三维空间中的变换算子。为了说明四元数的这些性质, 我们在这里研究一下球面几何的若干问题, 这些问题在历史上促进了四元数的发现。

球面几何在许多方面都象平面几何。例如, 若 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 表示球面上的两个点, 则可以象在平面上一样, 把量 $\mathcal{AB} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$ 作为点 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 之间的距离, 也就是, 连接点 \mathcal{A} 到点 \mathcal{B} 的大圆弧。

两点差的概念, 象连接它们的弧的概念一样, 也包括和的概念在内; 显然,

$$(\mathcal{B} - \mathcal{A}) + \mathcal{A} = \mathcal{B},$$

由此可得

$$\mathcal{AB} + \mathcal{A} = \mathcal{B}. \quad (1.22)$$

● 实际上, 我们用乘法由该等式得到:

$$i_1 \circ (i_1 \circ i_2) = i_1 \circ i_3 = (i_1 \circ i_1) \circ i_2 = -i_2,$$

$$(i_1 \circ i_2) \circ i_2 = i_3 \circ i_2 = i_1 \circ (i_2 \circ i_2) = -i_1.$$

将这两个等式相乘:

$$(i_1 \circ i_3) \circ (i_3 \circ i_2) = i_2 \circ i_1 = i_1 \circ (i_3 \circ i_3) \circ i_2 = -i_1 \circ i_2 = -i_3,$$

$$(i_3 \circ i_2) \circ (i_2 \circ i_1) = i_1 \circ i_3 = i_3 \circ (i_2 \circ i_2) \circ i_1 = -i_3 \circ i_1 = \ominus,$$

等等。可以验证, 超复数单位的全部乘法规则都是成立的。

● 原书误为 $\dots\dots\dots = -i_1 \circ i_3$ 。——校者

后一运算的涵义可这样解释: 弧 AB 把点 A 转移到点 B 。这里已经出现弧形成的新概念, 即算子概念; 因此, 弧也称之为回量。

引用的定义将给定方向: 从点 A 到点 B 说成是弧 AB 。所谓弧 BA 则应理解为从点 B 到点 A 的大圆弧, 即反向弧[●]: 因为 $BA = A - B$

和 $AB + BA = B - A + A - B = 0$, 所以, $BA = -AB$ 。两点差的这一定义足以给出球面上弧的相加和相减。

我们来研究方程 $(A - C) + (C - B) = (A - B)$, 根据定义它可写成

$$CA + BC = BA, \quad (1.23)$$

即球面三角形两边之和等于其第三边(图 1.9)。

当两弧位于一个大圆上, 而其长度和方向又相同时, 也只有这时, 我们才能将这两个弧看成是相等的。相等的弧沿其所在大圆移动是可以重合的。注意到, 根据这个定义, $BC = CB'$ 和 $A'C = CA$ (见图 1.9), 将等式(1.23)中的被加数调换一下位置, 便得到

$$BC + CA = CB' + A'C = A'B',$$

即得到一个不等于弧 BA 的新弧。由此可见, 球面上的各弧相加是不可交换的。只有各弧位于一个大圆弧上时, 弧的相加才是可交换的: 这时, 相加归结为简单的算术相加。

改变一被加数的符号, 便可由相加得到弧的相减。例如, 我们来研究差 $CA - BC$ (见图 1.9), 因为 $BC = -CB$, 所以

$$CA - BC = CA + CB = CA + B'C = B'A.$$

我们使每个弧 AB 同其极点如此对应: 当从极点观察时, 从点 A 到点 B 的旋转按反时针进行。这样就从 A 到 B 的两条路径区分开来(角度为 ϑ 和 $2\pi - \vartheta$), 因为每一路径都同自己的极点相对应。

● 显而易见, 在大圆上有两个从点 A 到点 B 的弧。现在我们去区分它。

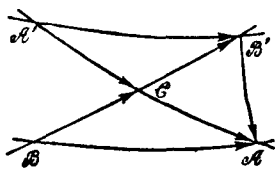


图 1.9

在球面几何中存在有两类图像,这就是大圆弧及其极点,所有的定理对它们都是正确的。极点同它的赤道弧相对应,就是说,点同弧对应得这样吻合,以致必须按已知涵义去建立它们的等式。

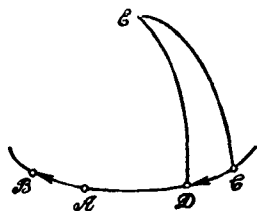


图 1.10

实际上,以前已将弧定义为两点之差,但是,点的加法运算本身还没有定义。为了不超出由点的“可加性”得出弧这一原理的范围,必须作出新的规定。我们假定点和弧彼此之间是一一对应的,就是说,我们使每一点,作为极点,等于长度为 $\pi/2$ (四分之一圆)的赤道正弧。我们将证明,所建立的规定使前面讨论过的规则仍然有效。

实际上, $B-A=AB$; $B=CD$ 和 $A=CC$, 就是说,点等于它的四分之一圆-回量 (Вектор-квадрант) (图 1.10)。

我们有

$$B-A=CD-CC=CD+CC=CD,$$

但实际上 $CD=AB$, 因为它们位于同一个大圆上,而且弧 BD 和 AC 之长等于 $\pi/2$ 。其次,等式 $(B-A)+A=B$ 也是正确的,因为

$$AB=CD \quad \text{和} \quad A=CC,$$

由此可见

$$(B-A)+A=AB+A=CD+CC=CD=B.$$

球面上任何一点 A 都有其反对称点 A' 与之对应,而与反对称点 A' 对应的是反向回量,即

$$A+A'=0 \quad \text{和} \quad A=-A';$$

不难看出,这些等式对于这些点的四分之一圆弧也是正确的。由这一点出发,可将两点之和变成两点之差,从而求出这个和。比方说,我们研究两点之和

$$B+A=B-A'=\overline{A'B}=(AB+A\overline{A'})=AB+\pi, \quad (1.24)$$

式中以 π 表示等于大圆之半的弧 AA' 。调换 B 和 A 的位置,我们有

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} + \pi,$$

但因 $+\pi$ 等于 $-\pi$, 这是由于弧不因增加 2π 而有所改变, 所以, 我们得到

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = -(\mathcal{A}\mathcal{B} + \pi) = -(\mathcal{B} + \mathcal{A}).$$

这样一来, 两点之和也是弧(回量), 一般说来, 它不等于四分之一圆, 因此, 和(差也一样)一般说来不等于点。当置换被加数时, 和改变符号。

只有一种情况, 各点之和与差给出一个点。假定 $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ 是球面上这样三个点, 即: 弧 $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_2\mathcal{J}_3$ 和 $\mathcal{J}_3\mathcal{J}_1$ 分别是与正极点 $\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_1$ 和 \mathcal{J}_2 相对应的四分之一圆(图 1.11)。

在这种情况下, 有

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2\mathcal{J}_1 + \pi = \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2.$$

但是, 根据定义, $\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_3$, 所以, $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_3$ 。从所得关系式可以得出结论: 只有在两点间的交角等于 $\pi/2$ 时, 两点之和或差才能重新决定一个点。循环改变 $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ 和 \mathcal{J}_3 的位置, 则得

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2. \quad (1.25)$$

因为对反对称点来说, 四分之一圆要改变方向, 所以我们有

$$\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_3', \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1', \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_2'. \quad (1.26)$$

在这些公式中, 同样可以看到点和回量的双重涵义: 除了直接的几何形象之外, 点(回量)也可理解为旋转算子。例如, 第一项被

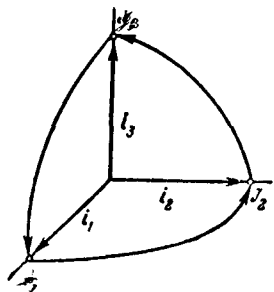


图 1.11

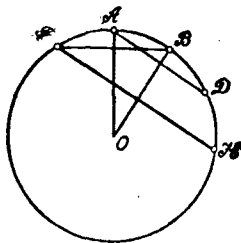


图 1.12

加数是将第二项被加数变换成下述结果的算子： \mathcal{I}_1 使点 \mathcal{I}_2 旋转四分之一圆，之后 \mathcal{I}_2 便同 \mathcal{I}_3 重合，等等。

现在可以证明旋转定理。

假定在球面大圆上给出分成等弧的五个点： \mathcal{F} ； \mathcal{A} ； \mathcal{B} ； \mathcal{D} ； \mathcal{H} （图 1.12）。假定有两个重合的球面：一个活动的和一个固定的。我们使活动球面绕轴 $\mathcal{O}\mathcal{A}$ 旋转一角度 π ，此时，点 \mathcal{B} 同点 \mathcal{F} 重合。继而，使活动球面绕轴 $\mathcal{O}\mathcal{B}$ 旋转一角度 π ，此时，点 \mathcal{A} 同点 \mathcal{D} 重合，而点 \mathcal{F} （即 \mathcal{B} ）同点 \mathcal{V} 重合。在这一最终状态下，结果弧 \mathcal{AB} 沿大圆弧移到位置 \mathcal{DH} ，即移动一个弧 $\mathcal{AD}=2\mathcal{AB}$ 。第一次旋转为二倍四分之一圆 \mathcal{A} ，即旋转 $2\mathcal{A}$ ，而第二次相应地旋转 $2\mathcal{B}$ 。

由此可见，旋转之和 $2\mathcal{B}+2\mathcal{A}$ 同旋转一个弧 $2\mathcal{AB}$ 是等价的，即

$$2\mathcal{B}+2\mathcal{A}=2\mathcal{AB},$$

（后者从式(1.24)也可得出，因为旋转一角度 2π 便回到原始位置）。

同样可以证明，

$$2\mathcal{C}+2\mathcal{B}=2\mathcal{BC},$$

因此，依次完成两次这样的旋转，便得到

$$2\mathcal{C}+2\mathcal{B}+2\mathcal{B}+2\mathcal{A}=2\mathcal{BC}+2\mathcal{AB}.$$

显然，旋转 $2\mathcal{B}+2\mathcal{B}$ 便回到原始状态；此外， $2\mathcal{C}+2\mathcal{A}=2\mathcal{AC}$ ，于是

$$2\mathcal{AC}=2\mathcal{BC}+2\mathcal{AB}, \quad (1.27)$$

就是说，球面依次绕其正极点旋转两倍弧 $2\mathcal{AB}$ 和两倍弧 $2\mathcal{BC}$ ，同球面绕球面三角形 \mathcal{ABC} 的第三个弧旋转总是等价的，亦即同绕弧 \mathcal{AC} 的正极点作两倍弧 $2\mathcal{AC}$ 的旋转总是等价的。因此，如果在三个回量 π 、 σ 、 τ 之间存在着这样一种关系，即 $\pi+\sigma=\tau$ ，那么，对于旋转来说，总存在着

$$2\pi+2\sigma=2\tau$$

这样的条件。基于这种等价性与球面原始状态无关的观点，可以

得出旋转加法的可结合性。

以上得到的结果足以使我们转入研究空间矢量的运算。我们将矢径同各点连系起来, 必须使矢量运算对应于所求出的回量和点的加法运算。因为回量加法是不可交换的, 所以, 只有矢量乘法运算可同它对应; 基于这一理由, 我们将球面加法称为乘法, 而将减法称为除法。

我们用 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{b}_1 、 \mathbf{c}_1 表示单位球面上点 \mathcal{A} 、 \mathcal{B} 、 \mathcal{C} 的矢量。可以证明, 在我们引用的有关矢量运算的定义的情况下, 给出点运算的所有基本原理都是成立的。所谓两矢量之商 $\mathbf{b}_1/\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 \circ \mathbf{a}_1^{-1}$ 将被理解为点 $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ 之差, 即回量 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 。显而易见, 球面三角形的关系(1.23)此时依然不变: 等式

$$\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{c}^{-1} \circ \mathbf{c}_1 \circ \mathbf{b}_1^{-1} = \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1^{-1}$$

对应于关系 $(\mathcal{A} - \mathcal{C}) + (\mathcal{C} - \mathcal{B}) = \mathcal{C}\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 就是说, 两商之积给出同一类型的商。

因为回量 $\mathcal{M}\mathcal{N} = \mathcal{N} - \mathcal{M}$ 对应于一个点, 例如点 \mathcal{C} (图 1.13), 所以, 每一矢量 \mathbf{c}_1 都有一个商 $\mathbf{n} \circ \mathbf{m}^{-1}$ 与之对应, 即 $\mathbf{c}_1 = \mathbf{n} \circ \mathbf{m}^{-1}$ 。显然, 与矢量 \mathbf{c}_1 相反的矢量 \mathbf{c}'_1 , 即

$$\mathbf{c}'_1 = -\mathbf{c}_1$$

对应于反对称点 \mathcal{C}' 。

另一方面, 因为点 \mathcal{C}' 对应于回量 $\mathcal{N}\mathcal{M} = \mathcal{M} - \mathcal{N}$, 所以, $\mathbf{c}'_1 = \mathbf{m} \circ \mathbf{n}^{-1}$, 由此可得, $\mathbf{c}_1 \circ \mathbf{c}'_1 = 1$, 这个结果是必然的, 因为对于回量来说 $\mathcal{C} + \mathcal{C}' = 0$ 。

所得关系表明, 同矢量 \mathbf{c}_1 相反的矢量 \mathbf{c}'_1 满足条件 $\mathbf{c}'_1 = \mathbf{c}_1^{-1}$, 因为只有在这种情况下, $\mathbf{c}_1 \circ \mathbf{c}'_1 = 1$ 。但另一方面, $\mathbf{c}'_1 = -\mathbf{c}_1$, 由此得出, $\mathbf{c}_1 \circ (-\mathbf{c}_1) = 1$ 和 $\mathbf{c}_1 \circ \mathbf{c}_1 = -1$, 就是说, 任何单位矢量的平方都等于 -1 。

对于通过点 \mathcal{I}_1 、 \mathcal{I}_2 、 \mathcal{I}_3 的三个正交单位矢量 \mathbf{i}_1 、 \mathbf{i}_2 、 \mathbf{i}_3 (见图 1.11)来说, 这些原则使之能够根据(1.25)和(1.26)得到如下关系:

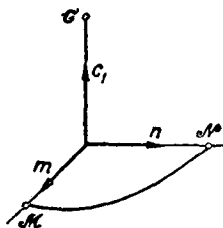


图 1.13

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_1 &= -1, & \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_2 &= -1, & \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_3 &= -1, \\ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}_3, & \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_3 &= \mathbf{i}_1, & \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_1 &= \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{i}_2 \circ \mathbf{i}_1 &= \mathbf{i}'_3 = -\mathbf{i}_3, & \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}'_1 = -\mathbf{i}_1, & \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_3 &= \mathbf{i}'_2 = -\mathbf{i}_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

式中, \mathbf{i}'_i 是方向相反的矢量。

所得单位矢量的乘法规则可推广到空间中任意矢量的乘法。为此, 我们将任意矢量 \mathbf{a} 表成下列形式:

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a}_1,$$

式中, \mathbf{a}_1 是单位矢量; 而 α 是数(标量), 我们称之为矢量的张量。

下面我们研究两矢量 $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{b} = \beta \mathbf{b}_1$ 之商, 我们用 Λ 表示它:

$$\Lambda = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}^{-1} = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1^{-1}. \quad (1.29)$$

所得商的第一个因子 α/β 称为张量, 而第二个因子 $\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{b}_1^{-1}$ 称为回量。商 Λ 决定于矢量长之比、矢量间的交角以及平面位置, 而平面位置又决定于两个参数, 所以, 确定 Λ 总共需要四个参数。因此, 称 Λ 为四元数。

(1.28) 中的正交单位矢量 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 因而也就是四元数。这些四元数乘法规则揭示出四元数所固有的双重涵义: 一方面, 它们是某些几何图像, 而另一方面, 又是算子。例如, 在乘积 $\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}_2$ 中, 可将第一个因子看作是作用于矢量 \mathbf{i}_2 并使之化为矢量 \mathbf{i}_3 的算子。因为四元数(1.29)被定义为商, 所以, 如果矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 之间的交角等于矢量 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} 之间的交角, 比例 \mathbf{a}/\mathbf{b} 和 \mathbf{c}/\mathbf{d} 相等, 此外, 矢量偶 \mathbf{a}, \mathbf{b} 和 \mathbf{c}, \mathbf{d} 所构成的平面又重合(图 1.14), 它们之比

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{c} \circ \mathbf{d}^{-1}$$

则构成同样的四元数。因此, 四元数决定于矢量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 构成的平面

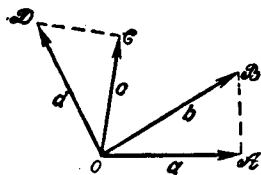


图 1.14

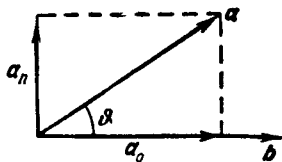


图 1.15

以及矢量之间的交角。

我们注意到, 点(矢量)对应于回量 $\pi/2$, 所以, 两个相互垂直的线段之商就是矢量。另一方面, 如果矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 共线, 则它们的商就是简单的实数。

我们来研究矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 之间有任何交角的情况(图 1.15)。矢量 \mathbf{a} 可分解为和式 $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_n$; 在这种情况下,

$$\Lambda = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_n) \circ \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{a}_0 \circ \mathbf{b}^{-1} + \mathbf{a}_n \circ \mathbf{b}^{-1}$$

将表示为等于模数比 \mathbf{a}_0/\mathbf{b} 的实数与矢量之和。由此可见, 每个四元数可以唯一地分成标量和矢量两部分。不难看出, 标量部分 (1.29) 等于

$$\frac{a_0}{b} = \frac{a \cos \vartheta}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \cos \vartheta,$$

同理, 矢量部分的模等于 $\frac{\alpha}{\beta} \sin \vartheta$ 。

其次, 如按正交单位轴 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 将四元数矢量加以分解, 则将得到以本章开头讲到的超复数来表示四元数的那种形式。

第二章 刚体的有限转动理论

本章中将研究正交变换, 这种变换是描述刚体旋转运动的数学形式^[16, 44, 66]。

刚体的任意有限运动都可分解为同某一任选点有关的平移和相对于该点的旋转。根据这一点, 在描述刚体运动的六个独立坐标中, 三个坐标给定刚体某一固定点在空间的移动, 三个坐标描述刚体的旋转。我们感兴趣的将仅仅是刚体相对于固定点的旋转。这个问题是力学的主要问题, 当考虑到刚体的有限维数时, 研究刚体的任何运动都必须解决这个问题。在许多实际情况下, 旋转运动同刚体的平移无关, 例如, 固定点是质量中心时, 刚体在任意力场中都处于自由运动状态。

在解决不能用点表示的刚体的任何动力学或运动学问题时, 都必须合理描述旋转运动的运动学。此时, 同刚体运动的三个旋转自由度对应的运动学参数的选择, 起着极其重要的作用。已经知道许多用来描述刚体运动的各种运动学参数: 方向余弦、欧拉-克雷洛夫角、凯里-克莱茵参数、罗德里格-哈密顿参数^[10, 31, 44]。作为四元数分量的罗德里格-哈密顿参数是最方便的参数之一。与欧拉角不同, 这些参数不管刚体处于任何位置都不退化(就是说, 无论参数本身或其变化速度都不会变为无穷)。罗德里格-哈密顿参数的数目等于四, 就是说, 与方向余弦有六个连系方程的情况不同, 它有一个连系方程。另一方面, 这些参数是表示借助于平面旋转给定刚体位置的最自然的方法。

刚体的有限旋转(即具有固定点的刚体的运动)有这样的特点: 它使一个轴在空间永远保持不动。这一事实为已知的欧拉定理所确定。根据这一定理, 刚体的任何旋转运动都等价于绕某一轴的平面旋转并可由绕该轴的有限转动给定, 或者由有限转动矢

量给定, 这个转动矢量指向欧拉旋转轴, 其长度决定于旋转角。平面旋转具有相同的角度, 它与旋转中心无关, 此时, 旋转轴自然相互平行。就这一点来说, 有限转动矢量是刚体任意移动的不变量。尤其是, 任意移动可分解为沿转动矢量轴和旋转平面上的两种平移以及旋转本身。通过平面旋转轴(或中心)的选择可将旋转平面上的平移转化为零(即, 使其同旋转合而为一; 此时, 旋转轴变成所谓的旋转中心)。在这种情况下, 刚体的任意移动都转化为螺旋运动^[19]。

罗得里格-哈密顿参数, 也象凯里-克莱茵参数一样, 决定于有限转动矢量。

应用这种运动学参数, 自然而然地要使用四元数。四元数提供一种工具, 这种工具使我们能够以最方便的形式确立同描述和研究刚体运动有关的一切运算。

在这一章里研究正交变换, 根据欧拉定理, 它们是有限转动。确立正交变换运算和四元数乘法运算间的同构对应。应用四元数使我们能够更全面地研究有限转动理论。尤其是, 有限转动理论的一切已知结果^[31]都是以四元数乘法运算的形式得到的。应用四元数使我们能够获得许多新结果: 罗得里格-哈密顿参数的变换(转动)加法定理, 有限转动可易性定理的推广, 等等。

另一方面, 所得到的同正交变换对应的四元数运算形式是十分一般的形式, 而且在描述任何参数的类似运算时都可使用它。下面对罗得里格-哈密顿参数同其它运动参数的关系所进行的研究, 十分明确地说明了这一事实。

这一章中利用的方法, 使我们能够以方便的形式表示同正交变换有关的一切运算。

§ 2.1 正 交 变 换

刚体的旋转运动可用各种不同的方法描述。刚体定向决定于同刚体固连的正交(笛卡尔)坐标系定向的这样一种方法, 是最通用的方法之一。

我们将认为, 具有单位矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 的直角坐标系 \mathbf{E} 同刚体是刚性固连的。研究刚体相对于以单位矢 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 为轴的直角坐标系 \mathbf{I} 的运动。我们将分别称坐标系 \mathbf{E} 和 \mathbf{I} 为固连基和固定基。还将认为, 两基的原点位于刚体绕其运动的同一个点上。

坐标系 \mathbf{I} 中基 \mathbf{E} 的任一轴 \mathbf{e}_k 的位置决定于该轴同轴 $\mathbf{i}_j (k, j = 1, 2, 3)$ 构成的三个方向余弦:

$$a_{k1} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_1, \quad a_{k2} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_2, \quad a_{k3} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_3.$$

九个方向余弦系完全可以确定固连基 \mathbf{E} 相对于原始坐标系 \mathbf{I} 的定向, 将这些余弦排列成维数为 3×3 的矩阵:

$$\mathbf{A} = \|a_{kj}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \|\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_j\|, \quad (2.1)$$

这种矩阵称为方向余弦阵。

固连基 \mathbf{E} 的任一单位矢都可通过基 \mathbf{I} 的单位矢由关系式●表示:

$$\mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1 + (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2 + (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3 = \sum_j a_{kj}\mathbf{i}_j. \quad (2.2)$$

此关系式是给定刚体运动的方法之一, 即一坐标系变为另一坐标系的变换。

现在我们研究: 如果坐标系 \mathbf{I} 中某一不变矢量的分量已知, 方向余弦怎样使我们能够表示出坐标系 \mathbf{E} 中这一矢量的分量。假定 \mathbf{r} 为不变矢量, 而 r_j 和 r'_k 分别是不变矢量在基 \mathbf{I} 和 \mathbf{E} 上的投影。显然,

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{i}_1 + r_2\mathbf{i}_2 + r_3\mathbf{i}_3 = r'_1\mathbf{e}_1 + r'_2\mathbf{e}_2 + r'_3\mathbf{e}_3.$$

由此不难得出,

$$r'_k = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_k = r_1\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{e}_k + r_2\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e}_k + r_3\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e}_k,$$

即

$$r'_k = \sum_{j=1}^3 a_{kj}r_j. \quad (2.3)$$

● 为便于参考, 我们指出: 关系式 (2.1) 中诸元 a_{kj} 是矢量 \mathbf{e}_k 在基 \mathbf{I} 上的协变分量; 矢量 \mathbf{e}_k 在基的单位矢上的展开式由 \mathbf{e}_k 在基 \mathbf{I} 上的逆变分量给定。对于正交坐标系 \mathbf{E} 和 \mathbf{I} , 协变和逆变分量相等^[28], 因此, 公式 (2.2) 是可能的。

显而易见, 变换(2.3)能确定坐标系的变换。当描述恒等于式(2.2)的关系式(2.3)给定的不变矢量的分量变换时, 这就是给出基变换的另一个方法。

关系式(2.3)是由矩阵 $\|a_{ij}\|$ 确定的线性变换方程。由于这种变换是描述刚体运动的, 所以, 矩阵(2.1)是正交变换阵, 诸元 a_{ij} 满足熟知的正交条件:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^3 a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } j=k \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } j \neq k \text{ 时} \end{cases}. \quad (2.4)$$

正交条件是刚体一种性质的反映, 即: 其任意点之间距离保持不变。矢量 \mathbf{r} 的长度不变意味着应该满足等式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 r_i^2 &= \sum_{i=1}^3 (r'_i)^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} r_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} r_k \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} \right) r_j r_k, \end{aligned} \quad (2.5)$$

由此也可得出前面的关系式(2.4)。

我们研究变基 \mathbf{E} 为基 \mathbf{I} 的逆变换, 它将由矩阵 \mathbf{A} 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = \|a'_{ij}\|$ 来确定。类似于关系式(2.2)和(2.4), 逆变换可写成基 \mathbf{E} 和 \mathbf{I} 的单位矢之间相互关系的等式, 或者不变矢量在这些基上的投影之间的关系式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_k &= \sum_{j=1}^3 a'_{kj} \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{r}_j &= \sum_{k=1}^3 a'_{jk} \mathbf{r}'_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

重温结论(2.5), 可以得出, 逆阵诸元也应满足于正交条件:

$$\sum_{i=1}^3 a'_{ij} a'_{ik} = \delta_{jk}. \quad (2.7)$$

另一方面, 研究矢量 \mathbf{r} 的下列表达式:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{i}_i = \sum_{j=1}^3 r'_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^3 r'_j \left(\sum_{k=1}^3 a_{jk} \mathbf{i}_k \right).$$

我们改变所得之和的求和顺序, 此时, 将首先根据第二个下标, 而

后根据第一个下标求和●

$$\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{jk} r'_j \right) \mathbf{i}_k,$$

即首先进行矩阵 \mathbf{A} 的转置, 其次得到

$$r_k = \sum_{j=1}^3 a_{jk} r'_j. \quad (2.8)$$

将所得关系式(2.8)同等式(2.6)加以比较, 可以看出,

$$a'_{jk} = a_{kj}, \quad (2.9)$$

即逆阵的元素等于转置阵的元素。显然, 这时等式(2.7)就成为另一种形式的正交条件(2.4)。此外, 条件(2.9)本身就是完全等价于●条件(2.4)的正交条件。用 $\|a_{kj}\| = \mathbf{A}^T$ 表示转置阵, 而用 $\|a'_{jk}\| = \mathbf{A}^{-1}$ 表示逆阵, 便可将条件(2.9)写成

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T. \quad (2.10)$$

若考虑到规范化正交基满足等式

$$\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = \delta_{jk}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad (2.11)$$

则从关系式(2.2)和(2.6)也可直接得出正交条件。将单位矢量的表达式(2.2)或(2.6)代入这些等式, 便直接得出条件(2.4), 显然, 这些等式是正交条件的反映。

为了便于给定变换, 我们使用矩阵符号。我们引入由单位矢量 \mathbf{i}_j 和 \mathbf{e}_k 组成的阵列, 我们用表示基的符号来表示这些阵列, 即

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

利用矩阵乘法运算, 可将变换(2.2)写成这种形式:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}^T\mathbf{E}. \quad (2.13)$$

我们还引入在某一基中矢量 \mathbf{r} 的分量, 即由 r_i 和 r_j 组成的阵列:

● 原书中下标号混为: $\sum_{j=1}^3 a_{kj} r'_j$, 因此(2.8), (2.9)中相应地应该为: $r_k = \sum_{j=1}^3 a_{jk} r'_j$ 和 $a'_{kj} = a_{jk}$; 而 $\|a_{jk}\| = \mathbf{A}^T$ 才是 $\mathbf{A} = \|a_{kj}\|$ 的转置矩阵。——校者

⊖ 算出等于相应代数余子式的逆阵元, 就可直接验证这一点。此时, 有或无等式(2.4), 等式(2.9)都可得到满足。

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{bmatrix}.$$

在这种情况下,表示式(2.3)可写成矩阵形式:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}^T \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{R}' = \mathbf{R}^T \mathbf{I} = \mathbf{I}^T \mathbf{R}, \quad (2.14)$$

而且利用引入的矩阵符号也不难得出这些关系式●:

$$\mathbf{E}^T \mathbf{R}' = (\mathbf{A} \mathbf{I})^T \mathbf{R}' = \mathbf{I}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R}' = \mathbf{I}^T \mathbf{R},$$

由此,

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{R}', \quad \mathbf{R}' = \mathbf{A} \mathbf{R} \quad (2.15)$$

(这里 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{1}$, 其中 $\mathbf{1} = \|\delta_{ij}\|$ 是单位矩阵)。

式(2.13)和(2.15)中的正交变换决定于矩阵 \mathbf{A} , 它可看作是变 \mathbf{I} 为 \mathbf{E} 的算子(在用给定旋转的第一种方法时), 或看作是基变换时给出不变矢量分量间转换的算子(在使用给定旋转的第二种方法时)。显然, 这两种方法完全等价, 而且用其中任一方法都足以给定旋转。

但是, 还有一个给定刚体旋转的方法, 它对正交变换有另外的解释。我们研究其位置相对于变换基不变的矢量, 即同坐标系一道旋转的矢量。显然, 这种矢量由于基的旋转而改变它在空间的位置。根据这一点, 基变换时矢量 \mathbf{r} 变为新的矢量 \mathbf{r}' 。矢量 \mathbf{r}' 是可以确定的, 因为, 在原始基中矢量 \mathbf{r} 的分量和在变换基中矢量 \mathbf{r}' 的分量相同:

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 r_j \mathbf{i}_j = \mathbf{R}^T \mathbf{I}, \quad \mathbf{r}' = \sum_{j=1}^3 r_j \mathbf{e}_j = \mathbf{R}^T \mathbf{E}. \quad (2.16)$$

利用关系式(2.13), 可以求出变换矢量

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}^T \mathbf{E} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{I} = (\mathbf{A}^T \mathbf{R})^T \mathbf{I} = \mathbf{R}'^T \mathbf{I},$$

式中, \mathbf{R}' 是基 \mathbf{I} 中矢量 \mathbf{r}' 分量的阵列●。从所得等式可以得出

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}^T \mathbf{R}, \quad (2.17)$$

● 还利用了矩阵的下列性质: 两矩阵积的转置矩阵等于两转置矩阵相反顺序的乘积。

● 要注意, 这里的 \mathbf{R}' 与(2.15)中的 \mathbf{R}' 是不同的, 后者是基 \mathbf{E} 中矢量 \mathbf{r} 分量的阵列。——校者

但因矩阵 \mathbf{A}^T 将矢量 \mathbf{r} 变换成矢量 \mathbf{r}' , 所以可把它看作是给定矢量变换的算子。此时, 可在一定条件下写成

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}^T \mathbf{r}. \quad (2.18)$$

得出的条件等式(2.18)是等式(2.17)的推论, 它以矩阵形式给出新矢量的分量。这是给定矢量相对于固定坐标系旋转的又一形式。

应该指出, 变换(2.17)和(2.18)是一般的仿射变换(线性变换; 例如, 见[28])形式。矩阵关系式(2.17)决定下列正交变换:

$$r'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} r_i. \quad (2.19)$$

指出这样一点是重要的, 即: 关系式(2.17)或(2.18)形式上类似于关系式(2.15)或(2.3), 这是因为后者也常常解释为一矢量变成另一矢量的变换运算。但是, 公式(2.3)和(2.15)可确定同一个矢量在不同基中的坐标, 然而, 关系式(2.17)和(2.18)实际上可确定同一个基中(在我们讨论的情况下为基 \mathbf{I})的不同矢量。所以, 在(2.15)式的情况下, 变 \mathbf{R} 为 \mathbf{R}' 的变换由矩阵 \mathbf{A} 进行; 在(2.17)时, 由逆阵 \mathbf{A}^T 进行。

变矢量为另一矢量的变换运算(2.18), 使我们能以另一种形式给定基的变换

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{A}^T \mathbf{i}_k (k=1, 2, 3), \quad (2.20)$$

在这种形式下, 基 \mathbf{I} 的每一单位矢都可利用变换(2.18)变换成基 \mathbf{E} 的单位矢。可以验证, 单位矢 \mathbf{e}_k 构成正交系的轴。此时应该指出, 在前面研究基变换的式(2.2)或(2.13)时, 新基 \mathbf{E} 的单位矢通过旧基 \mathbf{I} 的单位矢表示, 然而, 在变换(2.20)中, 新基单位矢的分量通过旧基的单位矢分量表示, 而且这些分量是在同一坐标系中得到的。

由于这种缘故, 必须将给定刚体旋转可能有的下列方法加以区别:

1) 以基变换运算(2.2)、(2.13)的形式或同这种变换一样, 在基变换时, 以不变矢量分量的变换形式(2.3)、(2.15)给定变换。此

时, 矢量旋转由逆运算给定,

2) 以矢量旋转运算(2.18)或(2.17)的形式给定变换。如果与此同时进行基的旋转, 则变换基相对于原始基的位置由逆运算决定。

有这两种不同解释的原因是不难理解的: 当固连坐标系相对于原始坐标系进行同样的旋转时, 固定坐标系中固连矢量的运动似乎是固定矢量相对于固连坐标系的反向运动。虽然正交变换(2.15)和(2.17)形式上相同, 仍须另外指明给定运算的形式●。

正交变换阵 \mathbf{A} 的行列式等于 +1; 另外, 矩阵 \mathbf{A} 确定的变换使一轴保持不变。已知的欧拉定理是这一事实的推论, 该定理确定: 具有固定点的刚体的任何移动都等价于绕固定轴的旋转。旋转轴是矩阵 \mathbf{A} 对应于特征值 +1 的特征矢量, 并可由特征方程●求出:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} = 0,$$

式中, λ 是矩阵的特征值。

特征方程的坐标形式是:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 &= 0, \\ a_{21}r_1 + (a_{22} - \lambda)r_2 + a_{23}r_3 &= 0, \\ a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + (a_{33} - \lambda)r_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

当 $\lambda = 1$ 时, 方程的解所确定的旋转轴的矢量准确到任一因子。为了求解这一方程, 必须研究: 基变换时算子怎样变化。

假定有一个由算子 \mathbf{G} 变换成矢量 \mathbf{t} 的矢量 \mathbf{s} [类似 (2.18)]:

$$\mathbf{t} = \mathbf{G}\mathbf{s}, \quad (2.22)$$

而对阵列 \mathbf{T} 和 \mathbf{S} 来说, 类似于(2.17), 我们有

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}\mathbf{S}; \quad (2.23)$$

此时, 算子 \mathbf{G} 由矩阵 $\|g_{ik}\|$ 给定。

还假定进行由矩阵 \mathbf{A} 实现的坐标系变换。在此种情况下, 确

● 这一问题已在果德斯坦的著作[16]中讨论过。

● 定理的证明, 在果德斯坦所著一书中已有陈述, 我们认为没有必要在这里重复它。

定新基中矢量 \mathbf{t} 和 \mathbf{s} 的阵列, 根据(2.15), 定为

$$\mathbf{T}' = \mathbf{AT}, \quad \mathbf{S}' = \mathbf{AS}. \quad (2.24)$$

另一方面, 表示矢量等式(2.22)的矩阵等式(2.23)也应进行变换(2.15), 即我们有

$$\mathbf{AT} = \mathbf{AGS}. \quad (2.25)$$

由此可得

$$\mathbf{T}' = \mathbf{AT} = \mathbf{AGS} = \mathbf{AGA}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{AGA}^{-1}\mathbf{S}' = \mathbf{G}'\mathbf{S}', \quad (2.26)$$

就是说, 在新基中, 类似于等式(2.23)的等式(2.26)与矢量等式(2.22)是一致的; 同时, 算子 \mathbf{G} 的矩阵也变换成新坐标。这样的变换称为相似变换, 根据(2.26), 它具有下列形式:

$$\mathbf{G}' = \mathbf{AGA}^{-1} = \mathbf{AGA}^T. \quad (2.27)$$

在一般情况下, 特征方程(2.21)有三个根。以第二个下标表示根的序号, 便可将特征方程(2.21)写成下列形式:

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} r_{jk} = \lambda_k r_{ik} = \sum_{j=1}^3 r_{ij} \delta_{jk} \lambda_{k0}$$

如果以 $\|r_{jk}\| = \mathbf{R}$ 表示矩阵, 所得特征方程便可写成矩阵形式:

$$\mathbf{AR} = \mathbf{R}\mathfrak{L},$$

式中

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix},$$

这是含有特征值的对角线阵。从所得关系式得出

$$\mathfrak{L} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{AR},$$

就是说, 为了求出矩阵 \mathbf{A} 的特征值, 应该求出将矩阵 \mathbf{A} 简化为对角线阵的基变换。大家都已知道, 正交变换阵有一个等于 +1 的特征值(和两个复共轭值^[10]), 同它对应的是欧拉旋转轴的特征矢量。

假定矩阵 \mathbf{B} 给出基 \mathbf{E}' 各轴的正交变换, 在基 \mathbf{E}' 中, 矩阵 \mathbf{A} 的变换是绕轴 \mathbf{e}'_1 的旋转, 就是说, 根据(2.27), 定为

$$\mathbf{A}' = \mathbf{BAB}^T \quad (2.28)$$

的矩阵 \mathbf{A}' , 具有如下形式:

$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{vmatrix}, \quad (2.29)$$

式中, ϑ 是绕旋转轴的转角。

显然, 矩阵 \mathbf{A} 的特征旋转轴的位置, 即 \mathbf{e}'_1 的方向将决定于矩阵 \mathbf{B} 的第一行 [根据 (2.15)], 而阵元也应是特征方程 (2.21) 的解。根据 (2.29) 可写成:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}' \mathbf{B}.$$

求出三个矩阵的所得积, 便组成同矩阵 \mathbf{A} 对角线对称的诸元差:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} - a_{21} &= 2b_{13} \sin \vartheta, \\ a_{31} - a_{13} &= 2b_{12} \sin \vartheta, \\ a_{23} - a_{32} &= 2b_{11} \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

矩阵 \mathbf{A} 的迹不会为相似变换所改变, 它等于

$$\text{Sp} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{Sp} \mathbf{A}' = 1 + 2 \cos \vartheta. \quad (2.31)$$

由所得等式 (2.30) 和 (2.31) 求出诸元 b_{1j} , 它是矩阵 \mathbf{A} 特征矢量 (欧拉旋转轴) 的方向余弦:

$$\left. \begin{aligned} r_1 = b_{11} &= (a_{23} - a_{32}) [4 - (1 - a_{11} - a_{22} - a_{33})^2]^{-\frac{1}{2}}, \\ r_2 = b_{12} &= (a_{31} - a_{13}) [4 - (1 - a_{11} - a_{22} - a_{33})^2]^{-\frac{1}{2}}, \\ r_3 = b_{13} &= (a_{12} - a_{21}) [4 - (1 - a_{11} - a_{22} - a_{33})^2]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.32) \bullet$$

这里研究的确定正交变换的主要关系式, 对于今后的研究已经足够了。这一问题更详细的讨论, 读者可在引用的文献中查找。

§ 2.2 正交变换的四元数乘法的表示式

前一节中讨论的、由方向余弦矩阵 \mathbf{A} 确定的正交变换的表示

● 原书误为:

$$\begin{aligned} r_1 = b_{11} &= (a_{23} - a_{32}) [4 - (1 - a_{11} - a_{22} - a_{33})^2]^{-\frac{1}{2}}, \\ r_2 = b_{12} &= (a_{31} - a_{13}) [4 - (1 - a_{11} - a_{22} - a_{33})^2]^{-\frac{1}{2}}, \\ r_3 = b_{13} &= (a_{12} - a_{21}) [4 - (1 - a_{11} - a_{22} - a_{33})^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad \text{——校者} \end{aligned}$$

式,是给定刚体运动的最通用的方法。矩阵 \mathbf{A} 本身含有三个独立参数: 其中两个确定欧拉平面旋转矢量轴的方位[就是说, 在 $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$ 的条件下, 确定式(2.32)中 r_1, r_2, r_3 的值], 而另一个确定旋转角 ϑ 。根据这一点, 诸元 $\|a_{ij}\|$ 可用这三个参数的函数表示。但是, 此时描述正交变换的矩阵形式变得十分不便, 它决定于某一基中运算的表示法。用四元数代数表示正交变换就显得方便得多了。这种表示法是以 § 1.3 中讨论的基本定理 1.1 为基础的。根据这一定理, 旋转运算(1.14)给出四元数矢量部分 \mathbf{r} 变为 \mathbf{r}' 的变换(1.20), 因此, 可看成是三维实空间的正交变换。

假定, 在由单位矢 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 构成的三维基中, 已知矢量

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{i}_i.$$

还假定矩阵 \mathbf{B} 确定由(2.19)这种形式给定的变矢量 \mathbf{r} 为矢量 \mathbf{r}' 的线性正交变换, 这种变换也可写成(2.18)那样的算子形式:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{B}\mathbf{r}$$

(在这种情况下 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$)。

我们将研究四维超复数空间 \mathbf{H} , 它是由形式上与三维基 \mathbf{I} 的单位矢量相同的超复数单位 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 构成的。

假定在空间 \mathbf{H} 中, 由单位四元数确定的旋转运算(1.20)已知, 它使矢量 \mathbf{r}' 对应于矢量 \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A} \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\mathbf{A}}. \quad (2.33)$$

显然, 矢量 \mathbf{r}' 和 \mathbf{r} 决定于它在超复数基 \mathbf{H} 中的分量。此时, 类似于运算(2.20)的旋转运算(1.20)给出相对于确定基变一矢量为另一矢量的变换。我们将两种变换分别写成由(2.19)和(1.19)得到的坐标形式:

$$r'_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij} r_j, \quad (2.34)$$

$$\left. \begin{aligned} r'_1 &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_1 + 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) r_2 + 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) r_3, \\ r'_2 &= 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3) r_1 + (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2) r_2 + 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) r_3, \\ r'_3 &= 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) r_1 + 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1) r_2 + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) r_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

我们使变换(2.34)的系数 b_{ij} 同线性变换(2.35)的系数恒等。此时, 就建立了正交变换表示式(1.20)和(2.18)之间的单值对应关系。这种对应是同构的, 就是说, 四元数 Λ 给定的、超复数空间中的旋转运算, 对应于正交矩阵 \mathbf{B} (算子 \mathbf{B}) 确定的、三维空间中旋转的任何群的运算, 同时, \mathbf{B} 和 Λ 相互确定。

实际上, 我们研究群的条件。

1. 同(2.34)或(2.18)的逆运算

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}'$$

对应的是变换

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{r}' \circ \Lambda,$$

而且, 等式 $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{1}$ 和 $\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \mathbf{1}$ 成立, 就是说, 存在一个由恒等变换确定的么元素。

2. 同两个变换

$$\mathbf{r}' = \mathbf{B}\mathbf{r}, \mathbf{r}'' = \mathbf{C}\mathbf{r}'$$

之积, 即算子矩阵 \mathbf{D} 确定的变换

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{D}\mathbf{r}, \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{B}$$

相对应的是, 依次变换的四元数之积

$$\mathbf{r}' = \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}, \mathbf{r}'' = \mathbf{M} \circ \mathbf{r}' \circ \tilde{\mathbf{M}}, \mathbf{r}'' = \mathbf{N} \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\mathbf{N}},$$

式中

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \Lambda.$$

同矩阵 \mathbf{B} 的作为方向余弦的诸元相似, 四元数分量可作为运动学参数使用, 因为它们单值地确定一基相对于另一基的位置。由此可见, 这些参数可用来描述刚体相对于某一选定坐标系的运动。此时, 应该注意到, 确定同一旋转变换的两个四元数(Λ 和 $-\Lambda$)对应于刚体的一个位置。

从(2.34)和(2.35)中可直接看出, 四元数 Λ 的分量决定矩阵 \mathbf{B} 的诸元。如果 b_{ij} 已知, 从此也可决定 Λ 的分量(不言而喻, 得到的分量是双值的); 实际上, 根据(2.35)式, 我们有

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} + b_{33} &= 3\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 = 4\lambda_0^2 - 1, \\ \lambda_0 &= \pm \frac{\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}}{2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

而考虑相对于对角线对称的诸元之差, 便得到:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \pm \frac{b_{32} - b_{23}}{4\lambda_0} = \frac{b_{32} - b_{23}}{2\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}}, \\ \lambda_2 &= \pm \frac{b_{13} - b_{31}}{4\lambda_0} = \frac{b_{13} - b_{31}}{2\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}}, \\ \lambda_3 &= \pm \frac{b_{21} - b_{12}}{4\lambda_0} = \frac{b_{21} - b_{12}}{2\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

比较关系式(2.36), (2.37)和(2.31), (2.32), 不难确信, 四元数 Λ 的矢量部分是欧拉旋转轴, 也就是矩阵 \mathbf{B} 的特征矢量(应该考虑到, 在我们这种情况下, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ 和分量 λ_i 是四元数 Λ 的单位矢量 ζ 的方向余弦)。

§2.3 基的变换

在矢量 \mathbf{r} 变换为矢量 \mathbf{r}' 的两表示式之间得到的对应关系, 使我们能够将正交变换运算(2.19)写成(1.20)的形式。变换(1.20)总是变换矢量, 因为基 \mathbf{I} 保持不变, 形式上又与进行四元数乘法运算的超复数空间 \mathbf{H} 的单位矢 \mathbf{i}_i 相同。但是, 利用基和不变矢量坐标的已知变换运算可以单值地求出与之对应的四元数运算。

我们研究基的变换问题。假定在除去基 \mathbf{I} 之外的三维空间中, 给定一个单位矢为 \mathbf{e}_i 的规范化正交基 \mathbf{E} , 同时

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 e_{ki} \mathbf{i}_i \quad (i, k=1, 2, 3). \quad (2.38)$$

下面, 我们研究对矢量 \mathbf{e}_k 的分量进行的正交变换:

$$\mathbf{e}'_{ki} = \sum_{j=1}^3 b_{ij} e_{kj}. \quad (2.39)$$

显然, 诸元 \mathbf{e}'_{ki} 确定用正交变换(2.39)由 \mathbf{e}_k 得到的新矢量

$$\mathbf{e}'_k = \sum_{i=1}^3 e'_{ki} \mathbf{i}_i.$$

正交变换(2.39)也可写成矩阵形式:

$$\mathbf{e}'_k = \mathbf{B} \mathbf{e}_k \quad (k=1, 2, 3). \quad (2.40)$$

可以确信, 矢量 \mathbf{e}'_k 构成规范化正交基 \mathbf{E}' (由于矩阵 \mathbf{B} 的正交条件, 这一点可以实现)。由于正交变换运算(2.34)和旋转运算(1.20)同构, 基的变换(2.39)或(2.40)可写成下列形式:

$$\mathbf{e}'_k = \Lambda \circ \mathbf{e}_k \circ \tilde{\Lambda} \quad (k=1, 2, 3). \quad (2.41)$$

这种变换实质上决定基的变换。矢量 \mathbf{e}'_k 将是单位矢量(因为旋转变换不改变矢量的范数)而且相互正交。研究标量积,可以看出满足正交条件:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'_n &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}'_k \circ \mathbf{e}'_n + \mathbf{e}'_n \circ \mathbf{e}'_k) \\ &= \frac{1}{2} (\Lambda \circ \mathbf{e}_k \circ \mathbf{e}_n \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \mathbf{e}_n \circ \mathbf{e}_k \circ \tilde{\Lambda}) \\ &= \frac{1}{2} \Lambda \circ (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_n) \circ \tilde{\Lambda} = \delta_{kn}, \end{aligned}$$

即矢量 \mathbf{e}'_k 构成基 \mathbf{E}' 。

由此可见,以旋转运算(2.41)的形式给出的基变换,仅仅对应于给定刚体运动的上述形式中的一种形式,即:(2.20)这种形式的正交变换。

表示基变换的其它形式(2.2)和(2.13),则以按原始基的矢量展开的形式表示新基的单位矢。这种变换形式不能写成旋转运算(1.20)的形式。但是,变换矩阵(2.2)和(2.13)的诸元可通过旋转变换矩阵的诸元表示,因为(2.18)、(2.40)和(2.2)、(2.13)这种形式的变换具有互逆矩阵(即转置阵)。

实际上,假定(2.39)这种形式的基变换已知。我们证明,新基的单位矢 \mathbf{e}'_k 可利用逆矩阵 \mathbf{B}^T 以原始基的单位矢 \mathbf{e}_k 表示。根据(2.39),我们有

$$\mathbf{e}'_k = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}'_k \mathbf{i}_i = \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} \mathbf{e}_{kj} \mathbf{i}_i = \sum_{i,j,m=1}^3 b_{ij} \mathbf{e}_{kj} \mathbf{e}_{mi} \mathbf{e}_m,$$

式中,单位矢 \mathbf{i}_i 以(2.38)的逆变换表示。因为诸元 $\|\mathbf{e}_{kj}\|$ 构成正交矩阵,所以等式

$$\sum_{k,m=1}^3 \mathbf{e}_{km} \mathbf{e}_{mk} = 1$$

成立。将这个1代入确定 \mathbf{e}'_k 的和式中,则得:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_k &= \sum_{i,j,m,k=1}^3 b_{ij} \mathbf{e}_{kj} \mathbf{e}_{km} \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mi} \mathbf{e}_m = \sum_{i,j,m=1}^3 b_{ij} \delta_{jm} \delta_{ki} \mathbf{e}_m \\ &= \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{j,i=1}^3 b_{ji} \delta_{jm} \delta_{ki} \right) \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^3 b_{mk} \mathbf{e}_m, \end{aligned} \quad (2.42)$$

这里使用了正交条件(2.4)。从(2.42)可以看出, 确定基 E' 的矢量按基 E 的矢量展开的矩阵 B^T 的诸元, 等价于逆四元数 $\tilde{\Lambda}$ 给定的旋转变换(2.35)的诸元。

下面, 研究基 E 的矢量表示式(2.38)。可以确信, 系数 e_{ki} 构成变单位矢 i_k 为单位矢 e_k 的正交变换矩阵, 而且, 使基 E 的新分量 e_{ki} 同原始基(即 I)展开式的单位分量对应的这种明显恒等式

$$e_{ki} = \sum_{j=1}^3 e_{ji} \delta_{kj} \quad (2.43)$$

将是类似于(2.39)的变换形式。由于正交变换运算和旋转运算的同构, 存在有这样的四元数 S , 其分量根据类似于(2.36)和(2.37)的关系式由诸元 e_{kj} 确定, 这就使等式

$$e_k = S \circ i_k \circ \tilde{S} \quad (2.44)$$

得以成立。

由同一表示式可以看出, 在矢量展开式(2.38)和正交变换(2.43)的公式中有逆(置换)矩阵的诸元 $\|e_{ki}\|$ 。

我们再一次指出, 变换(2.44)给定矢量旋转, 就是说, 它同构于变换(2.40), 而不是(2.2)。

§ 2.4 不变矢量的分量变换。超复数映像

在前两节中, 以旋转运算(1.20)的形式给定了矢量变换和基变换。现在研究, 怎样才能以这种形式表示不变矢量的分量由于基的变化而产生的变换。

我们研究不变矢量 r 。假定 r_{iE} 和 $r_{iE'}$ 将分别是不变矢量在基 E 和 E' 的轴上的投影:

$$r = \sum_{i=1}^3 r_{iE} e_i = \sum_{i=1}^3 r_{iE'} e'_i. \quad (2.45)$$

我们引入下列四元数, 它是由矢量在基 E 和 E' 上的分量所组成:

$$\left. \begin{aligned} R_E &= r_{1E} i_1 + r_{2E} i_2 + r_{3E} i_3, \\ R_{E'} &= r_{1E'} i_1 + r_{2E'} i_2 + r_{3E'} i_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

我们将四元数(2.46)分别称为矢量 r 在基 E 和 E' 上的超复数映

像(或简称映像)。矢量在某一基上的超复数映像同矢量本身相等, 如果这个基与超复数空间 \mathbf{H} 的三个矢量 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 重合或者说, 同基 \mathbf{I} 重合, 这两种提法是一样的。

基 \mathbf{E}' 的单位矢借助于旋转运算(2.41)可用基 \mathbf{E} 的单位矢表示。我们将关系式(2.41)代入等式(2.45):

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_{iE'} \mathbf{e}_i' = \sum_{i=1}^3 r_{iE'} \Lambda \circ \mathbf{e}_i \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \left(\sum_{i=1}^3 r_{iE'} \mathbf{e}_i \right) \circ \tilde{\Lambda}。$$

现在, 如果使基 \mathbf{E} 的单位矢同超复数空间的矢量 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 重合, 则在所得等式

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_{iE} \mathbf{e}_i = \Lambda \circ \left(\sum_{i=1}^3 r_{iE'} \mathbf{e}_i \right) \circ \tilde{\Lambda}$$

中, $\sum_{i=1}^3 r_{iE} \mathbf{e}_i$ 和 $\sum_{i=1}^3 r_{iE'} \mathbf{e}_i$ 同矢量 \mathbf{r} 在基 \mathbf{E} 和 \mathbf{E}' 上的超复数映像(2.46)相等, 由此可得

$$\mathbf{R}_E = \Lambda \circ \mathbf{R}_{E'} \circ \tilde{\Lambda}。$$

这个表达式的左边乘以 $\tilde{\Lambda}$, 而右边乘以 Λ , 则得

$$\mathbf{R}_{E'} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{R}_E \circ \Lambda。 \quad (2.47)$$

因此, 下述定理成立。

定理 2.1 如果变基 \mathbf{E} 的单位矢量为基 \mathbf{E}' 的矢量的变换决定于旋转运算(2.41), 则这些基上不变矢量的坐标变换, 由对映像进行的逆运算(2.47)给定。

所得结果是自然的, 因为, 以(2.20)这种形式给定基变换的正交变换和不变矢量的分量变换是逆变换。既然旋转运算(2.33)和(2.41)给定单位矢量的变换, 其中每一矢量又都以四元数形式表示, 即由基 \mathbf{I} 上各自的分量给定, 所以这些基上所给定的不变矢量分量的变换的逆运算(2.47)是对四元数进行的, 这个四元数也就是映像(2.46)。如果在(2.47)中, 进行四元数相乘并使空间 \mathbf{H} 的单位矢的元素相等, 则矢量 \mathbf{r} 的分量 $r_{iE'}$ 可由分量 r_{iE} 求出。

根据定理 2.1 可以预料, 如果基变换[例如变换(2.41)]时某种量为逆运算[例如(2.47)]所变换, 则这种量决定不变矢量。我们求矢量 \mathbf{r} 在基 \mathbf{E} 上的投影和它在基 \mathbf{I} 上的投影的关系。以量

r_{ji} 表示矢量 \mathbf{r} 在基 \mathbf{I} 上的投影:

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 r_{ji} \mathbf{i}_j.$$

从基 \mathbf{I} 到基 \mathbf{E} 的转换借助于旋转运算 (2.44) 用四元数 \mathbf{S} 确定。根据定理 2.1, 分量 r_{ji} 应利用对映像进行的逆运算由 r_{iE} 表示。实际上, 矢量 \mathbf{r} 在基 \mathbf{I} 上的投影同矢量本身相等:

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 r_{ji} \mathbf{i}_j = \sum_{i=1}^3 r_{iE} \mathbf{e}_i.$$

通过式 (2.44) 的 \mathbf{e}_k 值代入 \mathbf{e}_i , 则得

$$\mathbf{R}_I = \sum_{i=1}^3 r_{iE} \mathbf{S} \circ \mathbf{i}_i \circ \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \circ \left(\sum_{i=1}^3 r_{iE} \mathbf{i}_i \right) \circ \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \circ \mathbf{R}_E \circ \tilde{\mathbf{S}},$$

由此得出结论:

$$\mathbf{R}_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{R}_I \circ \mathbf{S}. \quad (2.48)$$

§ 2.5 旋转运算的不变性。罗德里格-哈密顿参数

现在我们研究, 矢量 \mathbf{r} 变为矢量 \mathbf{r}' 的变换运算 (2.33) 是怎样求出的, 如果不把它写成矢量 \mathbf{r} 在基 \mathbf{I} 上的投影, 而是写成在其它基, 例如基 \mathbf{E} 上的投影。我们用 r_{iE} 表示矢量 \mathbf{r} 在基 \mathbf{E} 上的投影, 而以 r'_{iE} 表示矢量 \mathbf{r}' 在基 \mathbf{E} 上的投影。我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sum_{i=1}^3 r_{iE} \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 r_{ji} \mathbf{i}_j = \mathbf{R}_I, \\ \mathbf{r}' &= \sum_{i=1}^3 r'_{iE} \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 r'_{ji} \mathbf{i}_j = \mathbf{R}'_I, \end{aligned}$$

式中, r_{ji} 、 r'_{ji} 分别是矢量 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 在基 \mathbf{I} 上的投影 (前面曾表示为 r_j 和 r'_j); 而 \mathbf{R}_I 和 \mathbf{R}'_I 分别是矢量 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 在基 \mathbf{I} 上的超复数映像, 这些映像同矢量 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 相等。

我们确定 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 在基 \mathbf{E} 上的映像:

$$\mathbf{R}_E = \sum_{i=1}^3 r_{iE} \mathbf{i}_i, \quad \mathbf{R}'_E = \sum_{i=1}^3 r'_{iE} \mathbf{i}_i.$$

根据定理 2.1, 矢量 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 在基 \mathbf{E} 单位矢上的投影, 通过对超复数映像进行的运算以及基变换的逆运算同它们在基 \mathbf{I} 单位矢上的投影连系起来。因为基 \mathbf{E} 单位矢的变换决定于运算 (2.44),

所以类似于(2.48), 我们有

$$\mathbf{R}_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{R}_I \circ \mathbf{S}, \quad \mathbf{R}'_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{R}'_I \circ \mathbf{S}.$$

求 \mathbf{R}'_E 和 \mathbf{R}_E 的关系。映像 \mathbf{R}'_I 和 \mathbf{R}_I 同矢量 \mathbf{r}' 和 \mathbf{r} 相等, 所以它们之间由式(2.33)连系起来。可见

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_E &= \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{R}'_I \circ \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{R}_I \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{S} \\ &= \tilde{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{R}_E \circ \tilde{\mathbf{S}} \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{S} = \Lambda_E \circ \mathbf{R}_E \circ \tilde{\Lambda}_E, \end{aligned} \quad (2.49)$$

式中, 以 Λ_E 表示四元数 $\tilde{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}$ 。因此, 显而易见, $\tilde{\Lambda}_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{S}$ 。可以看出, (见 § 1.3), 四元数 Λ_E 的标量部分和四元数 Λ 的标量部分相同; 四元数 Λ_E 的矢量部分是通过旋转变换(1.20), 由四元数 Λ 的矢量部分得到的, 即

$$\lambda_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \lambda \circ \mathbf{S}.$$

利用定理 2.1 的结果, 从这个等式中可以得出这样的结论: 给定旋转运算(2.33)的四元数 Λ 的矢量部分是不变矢量, 因为, 基变换时它是根据不变矢量的坐标变换规则变化的。此外, 不难看出, 变换运算(2.49)保持着与(2.33)相同的形式。由此可以得出这样的定理:

定理 2.2 如以同一个任意基的坐标表示矢量 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 以及变换四元数 Λ 的矢量部分, 而且这些矢量的坐标变换根据不变矢量的变换规则进行, 则旋转运算(2.33)对于基的变换是不变的。

因此, 变矢量 \mathbf{r} 为 \mathbf{r}' 的变换运算可以写成 \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 在任意基上的分量。此时, 四元数 Λ 的矢量部分也应投影在这个基上。

因为可以写成

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}' = \sum_{i=1}^3 r'_i \mathbf{e}_i, \quad \Lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad (2.50)$$

所以, 定理 2.2 的内容也可这样解释, 即: 运算(2.49)可以写成对量(2.50)进行的运算形式(1.20), 而且单位矢量 \mathbf{e}_i 的乘法“规则”同超复数的乘法规则相似。不难理解, 之所以得出这一点是因为: 超复数空间 \mathbf{H} 的单位矢 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 同三维实空间的任何基重合。此时, 三维空间的矢量同这些矢量的四元数, 即映像相等。

定理 2.2 还确定了旋转运算(2.33)的一个特点——这种运算

具有矢量涵义这一事实。利用以矢量乘法运算(1.9)对四元数乘法的表示,就可利用三维空间的矢量运算来表示变换(2.33)。

为此,必须用三维矢量的函数表示变换的四元数 Λ 。考虑一个用

$$\theta = 2 \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (2.51)$$

表示的四元数 Λ 所确定的量

$$\frac{\Lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \mathbf{i}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \mathbf{i}_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \mathbf{i}_3 = 1 + \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{1}{2} \theta,$$

就可做到这一点。矢量 θ 称为有限转动矢量^[31, 44]。利用(1.11)这种形式的四元数表示式,可以看出,有限转动矢量等于

$$\theta = 2 \mathbf{i} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (2.52)$$

应用公式(1.9),可以三维空间矢量的乘法运算来置换关系式(2.33)中的四元数乘法运算:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \Lambda \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda} = (\lambda_0 + \lambda) \circ \mathbf{r} \circ (\lambda_0 - \lambda) \\ &= (\lambda_0 \mathbf{r} - \lambda \cdot \mathbf{r} + \lambda \times \mathbf{r}) \circ (\lambda_0 - \lambda) \\ &= \lambda_0^2 \mathbf{r} - \lambda_0 \lambda \cdot \mathbf{r} + \lambda_0 \lambda \times \mathbf{r} + \lambda_0 \mathbf{r} \cdot \lambda - \lambda_0 \mathbf{r} \times \lambda \\ &\quad + (\lambda \cdot \mathbf{r}) \lambda + (\lambda \times \mathbf{r}) \cdot \lambda - (\lambda \times \mathbf{r}) \times \lambda. \end{aligned}$$

约去同类项并考虑到, $(\lambda \times \mathbf{r}) \cdot \lambda = 0$, 以及 $(\lambda \times \mathbf{r}) \times \lambda = \lambda \times (\mathbf{r} \times \lambda) = \mathbf{r}(\lambda \cdot \lambda) - \lambda(\mathbf{r} \cdot \lambda)$, 便可将所得 \mathbf{r}' 的表达式写成下列形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \lambda_0^2 \mathbf{r} + 2\lambda_0 \lambda \times \mathbf{r} + \mathbf{r} \lambda^2 - 2(\mathbf{r} \lambda^2 - \lambda \mathbf{r} \cdot \lambda) \\ &= \mathbf{r} + 2\lambda_0 \lambda \times \mathbf{r} - 2\lambda \times (\mathbf{r} \times \lambda) \\ &= \mathbf{r} + \lambda_0^2 \frac{2\lambda}{\lambda_0} \times \left(\mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{2\lambda}{\lambda_0} \right), \end{aligned}$$

式中

$$\lambda^2 = \lambda \cdot \lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

我们利用引入的有限转动矢量(2.51), 考虑到: 根据(2.52), 有

$$\lambda_0^2 = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} |\theta|^2},$$

便得到有限转动时矢量变换的已知的罗德里格公式:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}|\boldsymbol{\theta}|^2} \boldsymbol{\theta} \times \left(\mathbf{r} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \right). \quad (2.53)$$

下面我们注意到, 给定变基 \mathbf{E} 为基 \mathbf{E}' 的正交变换运算(2.41)的四元数 Λ , 也可决定有限转动 $\boldsymbol{\theta}$ 的矢量(2.51)。这一变换实际上是绕轴 $\boldsymbol{\theta}$ 的旋转, 因为, 这样变换时矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 本身不变:

$$\Lambda \circ \boldsymbol{\theta} \circ \tilde{\Lambda} = \frac{2}{\lambda_0} \Lambda \circ \boldsymbol{\lambda} \circ \tilde{\Lambda} = \frac{2}{\lambda_0} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\theta}.$$

利用(1.11)这种形式的四元数表示式, 可将分量写成下列形式:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \lambda_1 = \gamma_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad \lambda_2 = \gamma_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad \lambda_3 = \gamma_3 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.54)$$

式中, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 正像 λ 一样, 是所述基轴上的矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 的方向余弦。根据这一点, 有限转动矢量或变换四元数可由它在任一基上的分量给定。类似于不变矢量在某一基上的超复数映像, 我们将研究由分量(2.54)(式中 γ_i 是四元数矢量 $\boldsymbol{\zeta}$ 在该基上的投影)组成的四元数。我们将这种四元数称为四元数 Λ 在所述基上的映像。显然, 四元数映像的标量部分和初始四元数的标量部分相同, 而其矢量部分和四元数矢量部分在该基上的映像相等。因而, 前面引入的 $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ 四元数[见(2.49)]

$$\Lambda_E = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_E = \lambda_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_{iE} \mathbf{i}_i = \tilde{S} \circ \Lambda \circ S.$$

四元数在基上的映像我们将以该基的下标表示, 以区别于不带下标的初始四元数。根据定理 2.1, 四元数映像可由同基变换运算相反的旋转运算求出。

具有特殊意义的是: 在为这些四元数所变换的坐标系中四元数的分量。在所述情况下, 这样的坐标系就是被四元数 Λ 变换为基 \mathbf{E}' 的基 \mathbf{E} 。变基 \mathbf{E} 为基 \mathbf{E}' 的变换决定于运算(2.41), 而且根据定理 2.2, 这一变换可写成单位矢量 \mathbf{e}_i 和 \mathbf{e}'_i 以及四元数 Λ 在基 \mathbf{E} 上(正像在任一其它基上一样)的投影。

基 \mathbf{E} 中四元数 Λ 的分量决定于映像 Λ_E 。由于变基 \mathbf{E} 的单

位矢为基 E' 的单位矢的变换, 根据定理 2.2 可写成 (2.49) 的形式, 即

$$(e'_k)_E = \Lambda_E \circ (e_k)_E \circ \tilde{\Lambda}_E,$$

所以, 基 E' 中四元数 Λ 的分量可借助于逆运算

$$\Lambda_{E'} = \tilde{\Lambda}_E \circ \Lambda_E \circ \Lambda_E = \Lambda_E,$$

由 Λ 在基 E' 上的映像确定。由此可见, 在基 E 和 E' 中四元数的分量相同。在为四元数所变换的基中, 以 (2.54) 的形式给出的四元数分量称为罗得里格-哈密顿参数^[31]。

下面, 我们将以星号表示分量为罗得里格-哈密顿参数的四元数。这个四元数在两个坐标系中的分量相等, 因为从一坐标系向另一坐标系的变换恰恰决定于这个四元数。参数为罗得里格-哈密顿参数的四元数具有特殊意义: 它似乎是变换的“特征”四元数。

下面, 我们将约定地称罗得里格-哈密顿参数组成的四元数为变换的特征四元数。在所述情况下,

$$\Lambda^* = \Lambda_E = \Lambda_{E'} = \tilde{S} \circ \Lambda \circ S$$

将是这样的四元数。

恰恰如此, 由于从基 I 到基 E 的转换决定四元数 S (2.44), 所以, 根据定理 2.1, 我们得到的四元数 S 在基 I 和 E 上的映像具有下列数值:

$$S_I = S, \quad S_E = \tilde{S} \circ S_I \circ S = S,$$

由此,

$$S^* = S_I = S_E = S.$$

§ 2.6 转动的相加

当依次进行二次、三次……的正交变换时, 要进行有限转动的相加。构成变换矩阵的乘法运算便对应着这一点: 如果第一次变换 (例如, 从基 E 到基 E' 的变换) 由矩阵 A 给定, 而第二次 (从 E' 到 E'') 由矩阵 B 确定, 则合成转动 (从 E 到 E'') 矩阵 C 将由下式确定:

$$C = BA. \quad (2.55)$$

如果从基 E 到基 E' 的转换运算决定于四元数 Λ (2.41) 给定的同构旋转运算, 而从基 E' 到基 E'' 的转换运算以类似的方法, 由四元数 M

$$e_i'' = M \circ e_i' \circ \tilde{M} \quad (i=1, 2, 3)$$

给定, 则由转换运算

$$e_i'' = N \circ e_i \circ \tilde{N}$$

确定的合成变换的四元数 N 将以构成变换的四元数之积

$$N = M \circ \Lambda \quad (2.56)$$

的形式求出(这一点曾在 §1.3 中研究过)。在这里, 我们注意到算子乘法公式(2.55)和(2.56)的相似之处。

根据四元数乘法规则(1.5), 四元数 $N = \nu_0 + \nu_1 i_1 + \nu_2 i_2 + \nu_3 i_3$ 的分量决定于构成变换的四元数

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_{j=1}^3 \lambda_j i_j \quad \text{和} \quad M = \mu_0 + \sum_{j=1}^3 \mu_j i_j$$

的分量。进行这一乘法运算并使单位矢的系数相等, 则得到四个标量等式:

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= \lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3, \\ \nu_1 &= \lambda_0 \mu_1 + \lambda_1 \mu_0 + \lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3, \\ \nu_2 &= \lambda_0 \mu_2 + \lambda_2 \mu_0 + \lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1, \\ \nu_3 &= \lambda_0 \mu_3 + \lambda_3 \mu_0 + \lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

在坐标系 I 中(即给定四元数的那一个坐标系中), 构成和合成四元数的分量 λ_i 、 μ_i 和 ν_i 确定第一、第二次转动以及合成转动的矢量。但在前一节中业已证明, 如果用任一坐标系来表示变换矢量和变换四元数的矢量部分, 则在该坐标系中旋转运算是成立的。我们研究这样一个问题: 如果用其它基表示变换的加法运算(2.56), 这一运算该怎样求出。

假定, 根据(2.44), 从基 I 到基 E 的转换决定于四元数 S 。于是, 量 s_i ($i=0, 1, 2, 3$) 将是这一四元数在基 I 和 E 上的分量, 因为四元数在基 I 上的映象同四元数本身相等 ($S_I = S$), 而 S 在基 E 上的映象决定于同(2.44)相反的旋转运算, 即

$$S_E = \tilde{S} \circ S \circ S = S_I = S^*.$$

我们研究, 确定变基 E 为基 E' 的有限转动的四元数 Λ 。四元数(见前一节)

$$\Lambda_E = \tilde{S} \circ \Lambda \circ S$$

将是四元数 Λ 在基 E 上的映象。既然, 从基 I 到基 E' 的转换为依次应用 S 和 Λ 所确定, 所以, 根据(2.56), 合成转换决定于乘积 $\Lambda \circ S$ 。根据这一点, Λ 在基 E' 上的映像就以

$$\begin{aligned} \Lambda_{E'} &= (\tilde{\Lambda} \circ \tilde{S}) \circ \Lambda \circ (\Lambda \circ S) = \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \Lambda \circ S \\ &= \tilde{S} \circ \Lambda \circ S = \Lambda_E = \Lambda^* \end{aligned} \quad (2.58)$$

的形式求出, 这也是前面已经证明了的。

从基 I 到基 E'' 的转换决定于四元数 S 、 Λ 、 M 给定的顺序转换。变基 I 为基 E'' 的合成四元数将等于 $M \circ \Lambda \circ S$ 。量

$$\begin{aligned} \Lambda_{E''} &= (\tilde{M} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{S}) \circ \Lambda \circ (M \circ \Lambda \circ S) \\ &= \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{M} \circ \Lambda \circ M \circ \Lambda \circ S \end{aligned} \quad (2.59)$$

将是四元数 Λ 在基 E'' 上的映象。

同理, 研究给定变基 E' 为基 E'' 的四元数 M , 就可求出 M 在基 E 、 E' 和 E'' 上的映象之值:

$$\left. \begin{aligned} M_E &= \tilde{S} \circ M \circ S, \quad M_{E'} = \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ M \circ \Lambda \circ S, \\ M_{E''} &= (\tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{M}) \circ M \circ (M \circ \Lambda \circ S) \\ &= \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ M \circ \Lambda \circ S = M_{E'} = M^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

合成转动矢量在基 E 、 E' 和 E'' 上的投影决定于四元数 N 在这些基上的映象:

$$\left. \begin{aligned} N_E &= \tilde{S} \circ N \circ S, \quad N_{E'} = \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ N \circ \Lambda \circ S, \\ N_{E''} &= \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{M} \circ N \circ M \circ \Lambda \circ S \\ &= \tilde{S} \circ \tilde{N} \circ N \circ N \circ S = N_E = N^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

我们注意到, 四元数 M 在基 E' 和 E'' 上的映象, 正如 N 在基 E 和 E'' 上的映像一样, 是相等的, 而且决定着这些变换的特征四元数(罗得里格-哈密顿参数)。

定理 2.3 合成转动四元数(N)的分量, 根据四元数乘法规则(2.56)和(2.57), 由第一次转动(Λ)和第二次转动(M)的分量

确定。乘法规则, 对于这些四元数在任意基上的映象来说依然成立。

证明 因为四元数 \mathbf{N} 、 Λ 和 \mathbf{M} 同它们在基 I 上的映象相等, 所以公式(2.56)本身就是这一定理的特例。我们凭借构成四元数 Λ 和 \mathbf{M} 在基 E 上的映象, 求四元数 \mathbf{N} 在基 E 上的映象。根据关系式(2.56)、(2.58)~(2.61), 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_E &= \tilde{S} \circ \mathbf{N} \circ S = \tilde{S} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ S \\ &= \tilde{S} \circ \mathbf{M} \circ S \circ \tilde{S} \circ \Lambda \circ S = \mathbf{M}_{E'} \circ \Lambda_{E'}.\end{aligned}$$

同理, 可以得出 \mathbf{N} 在基 E' 和 E'' 上的映象的表达式:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{E'} &= \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{N} \circ \Lambda \circ S \\ &= \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ S \circ \tilde{S} \circ \Lambda \circ S = \mathbf{M}_{E'} \circ \Lambda_{E'}, \\ \mathbf{N}_{E''} &= \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ S \\ &= \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{M} \circ (\mathbf{M} \circ \Lambda \circ S \circ \tilde{S} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{M}}) \circ \Lambda \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ S \\ &= \mathbf{M}_{E''} \circ \Lambda_{E''}.\end{aligned}$$

这样一来, 该定理就使我们能够利用公式(2.57)求出任一基上合成转动的四元数分量, 这时, 构成转动的四元数分量也应该用这个基表示。

四元数 \mathbf{N} 、 Λ 和 \mathbf{M} 决定着所述变换的有限转动矢量。每个四元数都可写成下述形式:

$$\left. \begin{aligned}\Lambda &= \lambda_0 + \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{i}_j = \lambda_0 + \sum_{j=1}^3 \lambda_{Ej} \mathbf{e}_j \\ &= \lambda_0 + \sum_{j=1}^3 \lambda_{E'j} \mathbf{e}'_j = \lambda_0 + \sum_{j=1}^3 \lambda_{E''j} \mathbf{e}''_j, \\ \mathbf{M} &= \mu_0 + \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{i}_j = \mu_0 + \sum_{j=1}^3 \mu_{Ej} \mathbf{e}_j \\ &= \mu_0 + \sum_{j=1}^3 \mu_{E'j} \mathbf{e}'_j = \mu_0 + \sum_{j=1}^3 \mu_{E''j} \mathbf{e}''_j, \\ \mathbf{N} &= \nu_0 + \sum_{j=1}^3 \nu_j \mathbf{i}_j = \nu_0 + \sum_{j=1}^3 \nu_{Ej} \mathbf{e}_j \\ &= \nu_0 + \sum_{j=1}^3 \nu_{E'j} \mathbf{e}'_j = \nu_0 + \sum_{j=1}^3 \nu_{E''j} \mathbf{e}''_j.\end{aligned}\right\} \quad (2.62)$$

从定理 2.3 可以看出, 求两变换之积 $\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \Lambda$ 这一规则, 对

四元数矢量部分在同一基上的投影来说, 依然没有改变。最后所提到的一点可以解释为: 基 \mathbf{E} 、 \mathbf{E}' 和 \mathbf{E}'' 的单位矢有可能作为超复数空间 \mathbf{H} 的单位矢使用(也应该这样, 因为可使超复数空间中的基 $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ 同任何三维基重合)。另一方面, 由于乘法运算 $\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \mathbf{A}$, 对于基变换是不变的, 所以它具有矢量涵义。

我们求有限转动相加的矢量公式。利用四元数乘法的表示式 (1.9) 并类似于 (2.51), (2.52) 引入有限转动矢量

$$\theta_\lambda = 2 \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \theta_\mu = 2 \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \theta_\nu = 2 \frac{\nu}{\nu_0},$$

使得

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \nu_0 + \nu &= \mathbf{M} \circ \mathbf{A} = (\mu_0 + \mu) \circ (\lambda_0 + \lambda) \\ &= \mu_0 \lambda_0 + \mu \lambda_0 + \lambda \mu_0 - \mu \cdot \lambda + \mu \times \lambda. \end{aligned}$$

我们将所得表达式的标量部分和矢量部分分开:

$$\nu_0 = \mu_0 \lambda_0 - \mu \cdot \lambda, \quad \nu = \lambda_0 \mu + \mu_0 \lambda + \mu \times \lambda.$$

显而易见, 有

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0}{\lambda_0 \mu_0} &= 1 - \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - \frac{1}{4} \theta_\mu \cdot \theta_\lambda, \quad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{2} \theta_\nu, \\ \frac{\nu}{\lambda_0 \mu_0} &= \frac{\lambda}{\lambda_0} + \frac{\mu}{\mu_0} + \frac{\mu}{\mu_0} \times \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{2} \left(\theta_\lambda + \theta_\mu + \frac{1}{2} \theta_\mu \times \theta_\lambda \right). \end{aligned}$$

得出这些表达式之比, 便求出有限转动相加的矢量公式

$$\theta_\nu = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \theta_\lambda \cdot \theta_\mu} \left(\theta_\lambda + \theta_\mu + \frac{1}{2} \theta_\mu \times \theta_\lambda \right). \quad (2.63)$$

下面, 我们研究依次进行的三次正交变换。如果从基 \mathbf{E} 到基 \mathbf{E}' 的转换决定于四元数 \mathbf{A} , 从 \mathbf{E}' 到 \mathbf{E}'' 的转换决定于四元数 \mathbf{M} , 而从 \mathbf{E}'' 到 \mathbf{E}''' 的转换决定于四元数 \mathbf{P} , 则变基 \mathbf{E} 为基 \mathbf{E}''' 的合成变换的四元数 \mathbf{N} 决定于乘积(见 § 1.3)

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{A}, \quad (2.64)$$

而且根据前述情况类推, 可以证明, 算子乘法公式 (2.64) 对于 \mathbf{N} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{A} 在任何相同坐标系上的映象都是正确的。

作为例子, 我们将等式 (2.64) 投影到基 \mathbf{E} 上。显然, 根据

(2.58)~(2.61)类推,可得

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_E &= \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{S}, \mathbf{P}_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{S}, \mathbf{M}_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{S}, \Lambda_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}, \\ \mathbf{N}_E &= \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} = (\tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{S}) \circ (\tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{S}) \circ (\tilde{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}) \\ &= \mathbf{P}_E \circ \mathbf{M}_E \circ \Lambda_E.\end{aligned}$$

同样,乘法定理 2.3 也可推广到任何数目的给定一系列依次转换的四元数。

根据已知的构成转动的四元数求合成转动的规则有这样的缺点,即:必须将四元数投影到同一个坐标系上。由于这种缘故,这种规则不能使合成变换和构成变换的罗德里格-哈密顿参数相互发生关系。实际上,将等式(2.56)投影到 \mathbf{E} 、 \mathbf{E}' 和 \mathbf{E}'' 中任一坐标系上,都将得到相应的四元数映象,其中只有某两个映象将是由罗德里格-哈密顿参数组成的特征四元数。

以罗德里格-哈密顿参数为其分量的四元数具有特殊意义。这是因为,确定运动学参数的导数和角速度之间关系的运动学方程,是描述有限转动矢量在原始(固定)和最终(固连)坐标系上的投影的,因此,应用中使用的恰恰是这些参数。

这里使用的将四元数投影在各种坐标系上的方法,使我们能够证明确定合成四元数 \mathbf{N}^* 同构成四元数 Λ^* 和 \mathbf{M}^* 之间关系的下述定理。

定理 2.4 假定 Λ^* 、 \mathbf{M}^* 和 \mathbf{N}^* 分别为第一次、第二次转动以及合成转动的特征四元数。于是,合成转动的四元数 \mathbf{N}^* 的分量,根据四元数乘法规则(1.5),由第一次和第二次转动的四元数 Λ^* 和 \mathbf{M}^* 的分量确定并以相反的顺序相乘:

$$\mathbf{N}^* = \Lambda^* \circ \mathbf{M}^*. \quad (2.65)$$

证明 利用关系式(2.58)、(2.60)和(2.61)表示四元数 \mathbf{N}^* 、 Λ^* 和 \mathbf{M}^* ,便立即得到公式(2.65):

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^* &= \mathbf{N}_E = \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} \\ &= \tilde{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} \circ (\tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{S}) \\ &= \Lambda_E \circ \mathbf{M}_{E'} = \Lambda^* \circ \mathbf{M}^*.\end{aligned}$$

进行(2.65)的四元数相乘并使单位矢的分量相等,便求出:

$$\left. \begin{aligned} \nu_0^* &= \lambda_0^* \mu_0^* - \lambda_1^* \mu_1^* - \lambda_2^* \mu_2^* - \lambda_3^* \mu_3^*, \\ \nu_1^* &= \lambda_0^* \mu_1^* + \lambda_1^* \mu_0^* + \lambda_2^* \mu_3^* - \lambda_3^* \mu_2^*, \\ \nu_2^* &= \lambda_0^* \mu_2^* + \lambda_2^* \mu_0^* + \lambda_3^* \mu_1^* - \lambda_1^* \mu_3^*, \\ \nu_3^* &= \lambda_0^* \mu_3^* + \lambda_3^* \mu_0^* + \lambda_1^* \mu_2^* - \lambda_2^* \mu_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

比较关系式(2.57)和(2.66)可以看到, 四元数矢量部分的后两项的符号已经改变。我们还发现, 如果将公式(2.66)写成投影, 例如, 基 \mathbf{E}' 上的投影, 则可从关系式(2.57)得到这些公式。此时, 必须借助于(2.35)这种方向余弦矩阵将矢量 \mathbf{N} 的分量重新投影到基 \mathbf{E} 或 \mathbf{E}'' 上。

定理 2.4 对于分别由四元数 Λ 、 \mathbf{M} 和 \mathbf{P} 确定的三个依次进行的变换, 也是正确的。在这种情况下, 考虑到关系式(2.58)和(2.60), 以及合成四元数 \mathbf{N} 决定于关系式(2.64), 便求出

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{N}_E = \mathbf{N}_{E''}, \quad \Lambda^* = \Lambda_E = \Lambda_{E'}, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{M}_{E'} = \mathbf{M}_{E''},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \mathbf{P}_{E''} = \tilde{\mathbf{S}} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} \\ &= \tilde{\mathbf{S}} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \tilde{\mathbf{P}} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} = \mathbf{P}_{E'''}, \end{aligned}$$

而其次

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^* &= \tilde{\mathbf{S}} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{S} \\ &= (\tilde{\mathbf{S}} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}) \circ (\tilde{\mathbf{S}} \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}) \circ (\tilde{\mathbf{S}} \circ \tilde{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \mathbf{S}) \\ &= \Lambda^* \circ \mathbf{M}^* \circ \mathbf{P}^*. \end{aligned}$$

既然以(2.65)这种形式描述的任何两次转动都可以合二为一, 所以依次地应用这个乘法公式也可以立即得出刚刚证明的三次转动的乘法公式。显然, 用归纳法可将这一定理推广到依次进行任意次变换的情况。

所进行的研究表明, 变换的特征四元数相加时, 它们也根据四元数乘法规则相乘, 但是, 这种形式的变换相加已不具有矢量意义。然而, 正如下面将要证明的, 恰恰是这种形式的加法在相对运动相加时是正确的。在这一点上反映出四元数能够比较完善地描述三维空间运动的性质。

最后, 我们研究大家熟悉的有限转动的可易性定理。

定理 2.5 如果首先进行第二次转动, 尔后, 绕上述转动变换

了的轴进行第一次转动, 则合成转动将是一样的。

这一定理可由四元数乘法公式立即得到证明: 如果四元数 Λ 决定第一次转动, 而四元数 \mathbf{M} 决定第二次转动, 则合成转动将决定于四元数

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \Lambda = \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{M} = \Lambda_{\mathbf{M}} \circ \mathbf{M},$$

式中, 以 $\Lambda_{\mathbf{M}}$ 表示四元数 $\mathbf{M} \circ \Lambda \circ \tilde{\mathbf{M}}$, 它是用四元数 \mathbf{M} 确定的旋转运算来变换四元数 Λ 得到的。

此外, 还可看出,

$$\mathbf{N} = \mathbf{M} \circ \Lambda = \Lambda \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda = \Lambda \circ \mathbf{M}_{\tilde{\Lambda}},$$

式中, $\mathbf{M}_{\tilde{\Lambda}}$ 是矢量部分为 $\tilde{\Lambda}$ 逆变换所变换了的四元数。由此得出结论, 转动也可这样变换: 先绕第一次逆转动变换了的轴进行第二次转动, 然后绕初始轴进行第一次转动。

转动可易性定理可推广到三次转动的情况。假定第一次转动决定于四元数 Λ , 第二次决定于四元数 \mathbf{M} , 第三次决定于四元数 \mathbf{P} , 于是, 合成转动将由下述四元数给定:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda = \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ (\tilde{\mathbf{M}} \circ \tilde{\mathbf{P}} \circ \mathbf{P} \circ \tilde{\mathbf{M}}) \circ (\tilde{\mathbf{P}} \circ \mathbf{P}) \\ &= (\mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \Lambda \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \tilde{\mathbf{P}}) \circ (\mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \tilde{\mathbf{P}}) \circ \mathbf{P} \\ &= \Lambda_{\mathbf{PM}} \circ \mathbf{M}_{\mathbf{P}} \circ \mathbf{P}, \end{aligned}$$

式中

$$\Lambda_{\mathbf{PM}} = (\mathbf{P} \circ \mathbf{M}) \circ \Lambda \circ (\tilde{\mathbf{P}} \circ \tilde{\mathbf{M}}) \bullet, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \circ \mathbf{M} \circ \tilde{\mathbf{P}},$$

就是说, 如果首先进行第三次转动, 继而绕上述转动变换了的轴进行第二次转动, 最后绕前两次转动变换了的轴进行第一次转动, 则得到的合成转动是相同的。

形式上不难将这一定理推广到依次进行任意次旋转的情形。

§2.7 罗德里格-哈密顿参数同其它运动学参数的关系

罗德里格-哈密顿参数是变换的特征四元数的分量。给定旋转变换的四元数分量同方向余弦(为正交变换阵元)之间的关系, 在本章的第二节已经做过详细的研究。

● 原书误为: $(\mathbf{P} \circ \mathbf{M}) \circ \Lambda \circ (\tilde{\mathbf{P}} \circ \tilde{\mathbf{M}})$ 。——校者

此时, 曾使(2.18)、(2.19)、(2.34)这种形式的正交变换同旋转变换(2.33)、(2.35)对应。据此, 使四元数元素同确定(2.13)或(2.40)形式的基变换以及矢量的分量变换(2.15)或(2.17)所确定的这些方向余弦对应。变换矩阵 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ 的诸元借助于关系式(2.34)~(2.37), 由四元数分量表示。

我们来确定变换四元数同其它运动学参数的关系。

I. 欧拉-克雷洛夫角

总的说来, 绕不同的非重合的轴依次转动三次就给出了任意的变换, 这种变换有欧拉角旋转之称。当绕坐标轴旋转时, 有两种转动顺序: 欧拉角旋转和克雷洛夫角旋转。

首先, 我们研究变基 \mathbf{I} 为基 \mathbf{E} 并绕坐标轴进行的三次平面旋转的欧拉顺序(图 2.1)。假定: 第一次旋转以进动角 φ 绕轴 \mathbf{i}_3 进行, 第二次旋转以章动角 ψ 绕轴 \mathbf{i}_1' 进行, 而第三次旋转以旋转角 θ 绕轴 \mathbf{e}_3 进行。

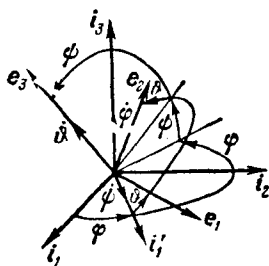


图 2.1

在(2.13)中, 给定从坐标系 \mathbf{I} 到坐标系 \mathbf{E} 转换的变换矩阵 \mathbf{A} , 是以三个顺序旋转的矩阵之积的形式得出的:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵相乘, 则得

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \psi & \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \cos \theta \sin \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & -\sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

用类似的方法, 根据每一平面旋转的四元数可求出合成旋转四元数。根据基本定理 1.1, 平面旋转一角度 θ 的四元数等于 $\cos \frac{\theta}{2} + \zeta \sin \frac{\theta}{2}$, 式中 ζ 是旋转轴的单位矢。为了求出合成四元数, 根据定理 2.3, 在一个基中表示出每一个构成四元数是可能的, 但这时, 至少有两个旋转矢量不能通过坐标轴而且把它们表示出

来也可能相当复杂。利用定理 2.4 的结果则比较方便。

假定: Λ 为绕轴 i_3 转一角度 φ 的第一次旋转的四元数。那么, 显然有

$$\Lambda^* = \cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2}.$$

第二次旋转绕轴 i'_1 转一角度 ψ ; 这一旋转的特征四元数

$$M^* = \cos \frac{\psi}{2} + i_1 \sin \frac{\psi}{2}.$$

第三次旋转绕轴 e_3 转一角度 δ ; 这一旋转的特征四元数

$$P^* = \cos \frac{\delta}{2} + i_3 \sin \frac{\delta}{2}.$$

根据定理 2.4, 合成特征四元数 N^* 将等于积

$$\begin{aligned} & \Lambda^* \circ M^* \circ P^* \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\psi}{2} + i_1 \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\delta}{2} + i_3 \sin \frac{\delta}{2} \right) \\ &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi+\delta}{2} + i_1 \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi-\delta}{2} \\ & \quad + i_2 \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi-\delta}{2} + i_3 \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi+\delta}{2}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

由此可得四元数分量同欧拉角的下述关系:

$$\left. \begin{aligned} \nu_0^* &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi+\delta}{2}, \quad \nu_1^* = \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi-\delta}{2}, \\ \nu_2^* &= \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi-\delta}{2}, \quad \nu_3^* = \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi+\delta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

利用构成四元数 N^* 的这些表达式, 通过旋转运算可以求出变基 I 为基 E 的转换公式 [例如, 以 (2.44) 这种形式] 以及不变矢量的分量的计算公式 [(2.48) 这种形式]。可以检验, (2.35) [还要考虑到 (2.69)] 这类转换矩阵的诸元是否同上面得到的 (2.67) 的矩阵 A^T 相等。

现在, 我们研究克雷洛夫角的三次旋转的顺序 (图 2.2), 这三次旋转也都

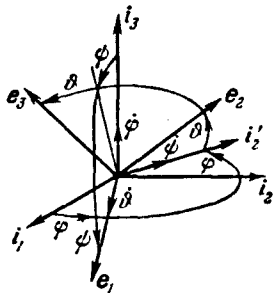


图 2.2

是绕被变换基的坐标轴进行的。第一次旋转以航向角 φ 绕轴 \mathbf{i}_3 进行, 第二次旋转以滚动角 ψ 绕轴 \mathbf{i}_2 进行, 而第三次以俯仰角 ϑ 绕轴 \mathbf{e}_1 进行。给定从坐标系 \mathbf{I} 到坐标系 \mathbf{E} 的变换矩阵 \mathbf{A} , 是通过三个平面旋转矩阵相乘得到的:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

矩阵相乘, 则得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \\ \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

下面, 我们求给出从基 \mathbf{I} 到基 \mathbf{E} 转换的旋转变换四元数。根据前述情况类推, 先求依次进行的平面旋转的特征四元数。四元数

$$\mathbf{A}^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}$$

同绕轴 \mathbf{i}_3 转一角度 φ 的第一次旋转对应。四元数

$$\mathbf{M}^* = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{i}_2 \sin \frac{\psi}{2}$$

同绕轴 \mathbf{i}_2 转一角度 ψ 的第二次旋转对应。四元数

$$\mathbf{P}^* = \cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2}$$

同绕轴 \mathbf{e}_1 转一角度 ϑ 的第三次旋转对应。

根据定理 2.4, 合成旋转四元数

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{A}^* \circ \mathbf{M}^* \circ \mathbf{P}^*$$

$$= \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{i}_2 \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \right). \quad (2.71)$$

四元数相乘后, 便以克雷洛夫角的函数的形式得到四元数分量的下述值:

$$\left. \begin{aligned} \nu_0^* &= \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \nu_1^* &= \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \nu_2^* &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \nu_3^* &= \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

所得四元数能以旋转运算的形式[例如,以(2.44)、(2.48)的形式]写出正交变换运算。读者可以确信,(2.35)这种旋转运算矩阵的诸元同(2.70)中矩阵 \mathbf{A}^T 的诸元相等。

当旋转轴和转角给定时,变换完全决定于三次欧拉旋转的顺序。另一方面,如果所需的变换给定,旋转轴和旋转顺序也是已知的,这就可以单值地确定欧拉旋转角。实际上,变换决于变换四元数的分量 ν_i 。可以看出,对于转角值来说,公式(2.69)或(2.72)是单值可解的。

欧拉角旋转是绕坐标轴的旋转(自然,是依次地变换的)。我们提这样一个问题:借助于绕任意轴的三次旋转能否完成任意给定的变换,如果不能,旋转轴的分布位置该怎样?应用四元数能够十分全面而直观地研究这个问题。

我们研究由已知四元数 \mathbf{N} 确定的任意变换。用单位球面上的弧表示四元数 \mathbf{N} ,便可看出(见 §1.2),在四元数的矢量部分 ν 确定的大圆上,这个弧占有自由位置,而其长度等于四元数 \mathbf{N} 的旋转角之半。假定同样的变换通过绕某些给定轴的旋转进行。每个旋转轴都在球面上确定大圆,构成合成变换的相应四元数的弧就应该在这个圆上。

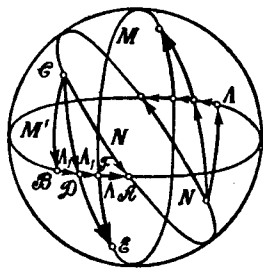


图 2.3

首先研究构成给定变换的两旋转轴已知的情况。这些轴决定球面上的圆 \mathbf{A} 和 \mathbf{M} (图 2.3)。显然,在以弧 \mathbf{AB} 和 \mathbf{BC} 表示的

两四元数之积的形式中, 已知的四元数 \mathbf{N} 可用弧 \mathcal{AC} 表示:

$$\mathbf{N} = \Lambda \circ \mathbf{M}'.$$

弧 \mathbf{M}' 是从“可判定的”弧 \mathbf{M} (即 \mathcal{EF}) 得到的, 其方法是通过旋转变换移动 \mathbf{M} 。实际上, 由三角形 \mathcal{DBC} 和 \mathcal{EFD} 求出

$$\mathcal{ED} = \mathcal{EF} + \mathcal{FD} = \mathcal{DC} = \mathcal{DB} + \mathcal{BC},$$

或者分别用四元数 \mathbf{P} 和 Λ_1 表示弧 $\mathcal{ED} = \mathcal{DC}$ 和 $\mathcal{FD} = \mathcal{DB}$, 我们得到

$$\mathbf{P} = \mathbf{M} \circ \Lambda_1 = \Lambda_1 \circ \mathbf{M}',$$

由此

$$\mathbf{M}' = \tilde{\Lambda}_1 \circ \mathbf{M} \circ \Lambda_1.$$

根据这一点, 我们通过“可判定的”旋转方向得到已知四元数 \mathbf{N} 的下述表达式:

$$\mathbf{N} = \Lambda \circ \mathbf{M}' = \Lambda \circ \tilde{\Lambda}_1 \circ \mathbf{M} \circ \Lambda_1.$$

既然旋转 Λ 和 Λ_1 绕同一个轴进行, 所以变换 $\Lambda \circ \tilde{\Lambda}_1$ 表示绕该轴的一次旋转, 这个轴以 Λ_2 表示。因此

$$\mathbf{N} = \Lambda_2 \circ \mathbf{M} \circ \Lambda_1. \quad (2.73)$$

显然, 这是(2.68)型欧拉旋转顺序。我们发现, 四元数弧的相加可在弧 \mathbf{N} 同弧 Λ 和 \mathbf{M} 的两个交点上进行。图 2.3 中所示系球体反面这样相加的一种, 它也得到了关系式(2.73)。图 2.4 所示系始于弧 \mathbf{N} 和 \mathbf{M} 交点的相加。根据图 2.4 得到

$$\mathbf{N} = \Lambda' \circ \mathbf{M}, \quad \Lambda' \circ \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1 \circ \Lambda,$$

由此

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}_1 \circ \Lambda \circ \tilde{\mathbf{M}}_1 \circ \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \circ \Lambda \circ \mathbf{M}_2,$$

显然, 这同欧拉旋转的其它顺序对应。

可以看出, 构成四元数的弧(即“可判定的”旋转轴)不一定要求“垂直”。但是, 从图 2.5 的讨论中可以看出, 对于构成旋转 Λ 和 \mathbf{M} 的大圆的所述位置来说, 不是任何旋转 \mathbf{N} 都可用它们的乘积表示。实际上, 绕轴的旋转变换 Λ 不能将弧 \mathbf{M} “移到”球面的任何一点, 而只能“移到”小圆 \mathcal{L} 和 \mathcal{E} 所限定的区域。对于决定平面 \mathcal{L}' 和 \mathcal{E}' 所限定的类似区域(图 2.5 中以虚线表示)的其它旋转顺

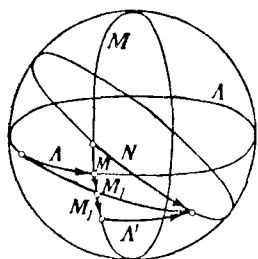


图 2.4

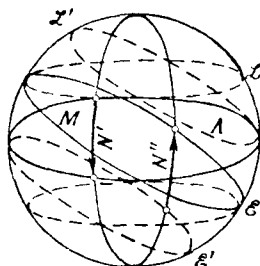


图 2.5

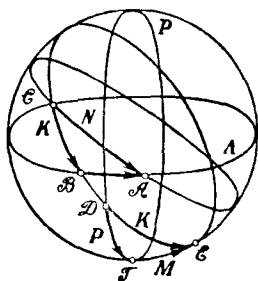


图 2.6

序,也有类似的条件。我们发现,四元数 \mathbf{N}' 和 \mathbf{N}'' 的最大弧长,对于两种顺序可能各不相同。因此,利用四元数 \mathbf{M} 和 \mathbf{A} 之积可以表示在平面 \mathcal{L} 和 \mathcal{C} 或 \mathcal{L}' 和 \mathcal{C}' 所限定的区域内减小的弧 \mathbf{N}' 。由此可见,尽管在 $\vartheta_v < \frac{\pi}{2}$ 时,也可应用非垂直旋转,但在构成旋转的轴垂直的情况下,角度 $\vartheta_v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的任意四元数只能用欧拉旋转顺序表示。

我们研究四元数 \mathbf{N} 用三个不同旋转之积进行表示的方法。假定,确定球面上大圆弧 \mathbf{A} , \mathbf{M} 和 \mathbf{P} 的旋转的三个方向已知(图 2.6)。构成给定四元数 \mathbf{N} 的四元数弧将位于这些圆弧上,四元数 \mathbf{N} 的弧位在相应的大圆上。如果旋转顺序(例如 \mathbf{A} 、 \mathbf{M} 、 \mathbf{P} ——正象在此种情况下一样)已知,那么,这就单值地给定了球面上弧的几何相加。

实际上,我们由球面三角形 \mathcal{CBA} 求出

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \circ \mathbf{K},$$

而从 $\mathcal{DC} = \mathcal{CB}$ 的三角形 \mathcal{DCF} 求出

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} \circ \mathbf{P},$$

由此

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \circ \mathbf{M} \circ \mathbf{P}, \quad (2.74)$$

就是说,得到了对应于克雷洛夫角旋转的相乘顺序(2.71)。可以看出,四元数 \mathbf{K} 的大圆位置由点 \mathcal{C} (四元数 \mathbf{N} 弧的端点)及弧 \mathcal{DC} 和 \mathcal{CB} 的等式条件给定。完全一样的三角形也存在于球的反面。同其它旋转顺序对应的将是弧的其它几何相加。

从图 2.6 中看出,不一定要求构成旋转是相互垂直的。然而,不是在构成弧处于任何位置时都可能上述分解。分析证明,要求四元数 \mathbf{K} 的弧(弧 \mathcal{CB})不大于四元数 \mathbf{M} 和 \mathbf{P} 的弧相应点之间的最大可能距离,是满足分解的充分条件。例如,可以看到,圆 \mathbf{M} 和 \mathbf{P} 相近时,可能发生弧 \mathcal{DC} 将始终小于弧 \mathcal{CB} 这种情况,就是说,不可进行分解。三个旋转轴中只要有两个垂直,分解就永远是可能的,而且当一大圆不断地逼近另一大圆时,旋转顺序接近欧拉顺序。

II. 凯里-克莱茵参数

凯里-克莱茵参数是四元数分量的复数组合。将这种组合引入刚体旋转的动力学,有两种方法:将球面投影到平面上并给出变平面为球面的分式线性变换^[31, 44]或者利用由单式变换●给定的线性变换的同构运算^[16]。确定四元数同凯里-克莱茵参数的关系时,利用后一种方法较为方便。在这里,我们扼要地介绍这种方法的实质,更详尽的叙述,读者可到参考资料[16]中查找。

假定复数二维空间 uv 和它的线性变换已知

$$u' = \alpha u + \beta v, \quad v' = \gamma u + \delta v,$$

后者是由矩阵

● 在 \mathbf{U} 空间(复线性空间)中,把一个正交基变成另一个正交基就要应用单式变换(即 \mathbf{U} 变换)来实现。有关这一方面的内容,可参阅《矩阵论》上卷(甘特马赫尔著,柯召译高等教育出版社,1955年)第九章。——校者

$$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad (2.75)$$

确定的。矩阵 \mathbf{U} 的复共轭转置矩阵(复共轭值将以星号表示), 即

$$\mathbf{U}^{*T} = \begin{vmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{vmatrix} = \mathbf{U}^+,$$

称之为矩阵 \mathbf{U} 的埃尔米特共轭矩阵。我们将研究满足下列条件的这种变换:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^+ &= \mathbf{U}^+\mathbf{U} = \mathbf{1}, \\ \det \mathbf{U} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

(在这里 $\mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ 是单位矩阵)。

满足(2.76)式第一个条件的矩阵称为单式矩阵。条件(2.76)化为诸元 α 、 β 、 δ 和 γ 应该满足的下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^*\alpha + \beta^*\beta &= 1, \\ \gamma^*\gamma + \delta^*\delta &= 1, \\ \alpha^*\gamma + \beta^*\delta &= 0, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

在这里前三个等式是矩阵 \mathbf{U} 的单式条件, 而后者满足于矩阵行列式为 1 的要求。从第三个等式得到关系式

$$\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

将它代入第四个等式, 则变为表达式

$$-(\alpha\alpha^* + \beta\beta^*)\frac{\gamma}{\beta^*} = 1.$$

考虑到(2.77)的第一个等式, 我们得到归结为条件(2.76)和(2.77)的矩阵 \mathbf{U} 的诸元应予满足的下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= -\beta^*, \quad \alpha^* = \delta, \\ \alpha\alpha^* + \beta\beta^* &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

满足条件(2.78)的四个元素 α 、 β 、 γ 和 δ 称为凯里-克莱茵

参数。线性变换矩阵(2.75)总共含有八个量,因为每个阵元都是复数。

等式(2.77)包括下列条件:前两个等式是实等式,第三个等式是复数等式,因此,变换矩阵的单式要求包括四个条件。对矩阵 \mathbf{U} 行列式的要求是第五个条件。所以,在满足条件(2.76)和(2.77)时,矩阵 \mathbf{U} 仅含有三个独立参数,就是说,这个数目恰恰是描述刚体在三维空间中的方位所需要的。

我们研究复二维空间中的矩阵算子:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & -r_3 \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

我们将把该算子的实分量 r_1 、 r_2 、 r_3 解释为三维空间中矢量 \mathbf{r} 的坐标。假定借助于单式矩阵 \mathbf{U} 使矩阵 \mathbf{R} 进行下述变换:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{U}\mathbf{R}\mathbf{U}^+. \quad (2.80)$$

关系式(2.80)描述的是空间 uv 进行单式变换时矩阵 \mathbf{R} 进行的相似变换[我们注意到: $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^+$, 由(2.76)可以得出这一结论]。既然,矩阵 \mathbf{R} 是埃尔米特矩阵(就是说,埃尔米特共轭阵等于本身的矩阵: $\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}$)而它的迹又等于零,所以矩阵 \mathbf{R}' 也应该是埃尔米特矩阵,它的迹也等于零(从相似变换不改变矩阵这两种性质的事实可以得出后一个结论)。由此得出结论,矩阵 \mathbf{R}' 应该具有下列形式:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} r'_3 & r'_1 - ir'_2 \\ r'_1 + ir'_2 & -r'_3 \end{bmatrix},$$

式中, r'_1 、 r'_2 和 r'_3 是实数。因为在进行相似变换时,矩阵的行列式也不变,所以

$$\begin{aligned} \det \mathbf{R} &= -(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \det \mathbf{R}' \\ &= -[(r'_1)^2 + (r'_2)^2 + (r'_3)^2]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

关系式(2.81)是正交变换的条件。根据这一点,可将运算(2.80)看作是变矢量 \mathbf{r} 为新矢量 \mathbf{r}' 的变换运算。关系式(2.80)中的各矩阵相乘,则得到分量 r'_i 同矢量 r_i ($i=1, 2, 3$)的下列关系:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} r'_3 & r'_1 - ir'_2 \\ r'_1 + ir'_2 & -r'_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (\alpha\delta + \beta\gamma)r_3 - \alpha\gamma(r_1 - ir_2) + \beta\delta(r_1 + ir_2) & -2\alpha\beta\gamma_3 + \alpha^2(r_1 - ir_2) - \beta^2(r_1 + ir_2) \\ 2\gamma\delta r_3 - \gamma^2(r_1 - ir_2) + \delta^2(r_1 + ir_2) & -(\alpha\delta + \beta\gamma)r_3 + \alpha\gamma(r_1 - ir_2) - \beta\delta(r_1 + ir_2) \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

如果将分量 r'_i 同 r_i 的关系表成关系式(2.18)这种形式, 则根据所得等式, 矩阵将为

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{B}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \gamma^2 + \delta^2 - \beta^2) & \frac{i}{2}(\gamma^2 - \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) & -i(\alpha\beta + \gamma\delta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \beta\gamma \end{vmatrix}. \quad (2.82) \bullet$$

可以证明, 正交变换(2.18)●和运算(2.80)同构, 并且可将此种形式体系推广到同刚体运动有关的各种变换。但是, 利用上面得到的结果来确定凯里-克莱茵和四元数的关系, 更为方便。这种关系不难用泡里自旋矩阵确定。自旋矩阵就是下面三个二维矩阵:

$$p_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (2.83)$$

我们发现, 自旋矩阵是单式埃尔米特矩阵(即 $p_i^\dagger = p_i$), 每个阵的迹等于零。自旋矩阵同单位矩阵

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

一起构成二维复数空间的四个独立矩阵。二维空间中任何 2×2 矩阵都可用上述四矩阵的线性组合表示:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2}(b+c)p_1 + \frac{i}{2}(b-c)p_2 + \frac{1}{2}(a-d)p_3 + \frac{1}{2}(a+d)1. \quad (2.84)
 \end{aligned}$$

如果这一矩阵的迹等于零, 则(2.84)的最末一项消失。此外, 如果

● 第二行第三列的元素原书误为: $-i(\alpha\beta - \gamma\delta)$ 。——校者

● 原书误为(2.81)式。——校者

矩阵为埃尔米特阵(即 a, d 为实数和 $b=c^*$), 则展开式 (2.84) 中自旋矩阵的系数为实数。

泡里矩阵能以下列形式表示算子 \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} r_3 & r_1 - ir_2 \\ r_1 + ir_2 & -r_3 \end{vmatrix} = r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3. \quad (2.85)$$

由于这一点, 矢量 \mathbf{r} 对应的矩阵算子 \mathbf{R} 就表示为矢量按三维空间“单位矢”展开的形式。此时, 泡里自旋矩阵是以这种单位矢的形式出现的, 这本身就建立了二维复数空间和三维实空间的关系。

我们研究一下: 怎样才能用自旋矩阵表示单式矩阵 \mathbf{U} 。

根据 (2.84), 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\beta + \gamma)p_1 + \frac{i}{2}(\beta - \gamma)p_2 + \frac{1}{2}(\alpha - \delta)p_3 + \frac{1}{2}(\alpha + \delta)\mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

可以看出[见关系式 (2.78)], p_i 的系数为虚数, 而单位矩阵的系数为实数。由此得出结论, 同矩阵 \mathbf{U} 埃尔米特共轭的矩阵为

$$\mathbf{U}^+ = \frac{1}{2}(\alpha + \delta)\mathbf{1} - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)p_1 - \frac{i}{2}(\beta - \gamma)p_2 - \frac{1}{2}(\alpha - \delta)p_3,$$

就是说, 自旋矩阵系数已经改变符号。

现在我们证明, 每个自旋矩阵都可确定绕自己的轴作单位旋转的算子。实际上, 矩阵 \mathbf{U} , 例如

$$\mathbf{U} = \alpha\mathbf{1} + \beta p_1$$

($\alpha = \delta$ 和 $\beta = \gamma$ 时就是这种矩阵) 的转换运算 (2.80), 使方向相同的矢量保持不变, 即

$$\mathbf{R} = r_1 p_1 = \mathbf{R}' = r'_1 p_1.$$

将上述各量代入关系式 (2.80), 则得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= \mathbf{U} \mathbf{R} \mathbf{U}^+ = (\alpha\mathbf{1} + \beta p_1) r_1 p_1 (\alpha\mathbf{1} - \beta p_1) \\ &= r_1 (\alpha^2 - \beta^2) p_1 = r_1 p_1 \end{aligned}$$

(应该考虑到, $p_1 \mathbf{1} = \mathbf{1} p_1 = p_1$ 和 $p_1 p_1 = \mathbf{1}$)。

可以证明, 如果 γ_i 是单位矢的方向余弦, 则单式矩阵

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} \cos \frac{\vartheta}{2} + i(\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3) \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (2.87)$$

决定使矢量 $\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3$ 保持不变的变换(2.80), 而这个矢量也将是旋转轴(旋转角等于 ϑ)。如果考虑到, 能使算子 \mathbf{R} 和 \mathbf{U} 进行“矢量”表示的自旋矩阵服从超复数单位乘法规则:

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = \mathbf{1}, \\ p_2 p_3 = -p_3 p_2 = i p_1, \quad p_1 \mathbf{1} = \mathbf{1} p_1 = p_1, \\ p_3 p_1 = -p_1 p_3 = i p_2, \quad p_2 \mathbf{1} = \mathbf{1} p_2 = p_2, \\ p_1 p_2 = -p_2 p_1 = i p_3, \quad p_3 \mathbf{1} = \mathbf{1} p_3 = p_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

则单式变换表示式(2.86)和变换(2.80)分别变成等价于四元数表示式(1.11)和旋转运算(1.14)。

因此, 自旋矩阵能够确定四元数和单式矩阵之间的对应关系。但我们发现, 自旋矩阵以略微不同的方式表示具有实系数的矩阵矢量(2.85)和变换的矩阵算子 \mathbf{U} (2.86)(矢量部分具有虚系数)。因此, 得到的自旋矩阵的乘法公式(2.88)也不是这样对称的。然而, 变换矩阵(2.87)对于四元数的等价性证明满足下列对应关系:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \delta), \quad \lambda_1 = \gamma_1 \sin \frac{\vartheta}{2} = -\frac{i}{2}(\beta + \gamma), \\ \lambda_2 &= \gamma_2 \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}(\beta - \gamma), \quad \lambda_3 = \gamma_3 \sin \frac{\vartheta}{2} = -\frac{i}{2}(\alpha - \delta), \end{aligned}$$

式中, $\lambda_i (i=0, 1, 2, 3)$ 可能是罗德里格-哈密顿参数。

考虑到由等式(2.86)得出的这些关系式, 可使凯里-克莱茵参数同四元数分量:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lambda_0 + i\lambda_3, \quad \delta = \lambda_0 - i\lambda_3, \\ \beta &= \lambda_2 + i\lambda_1, \quad \gamma = i\lambda_1 - \lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

连系起来。用分量 λ_i 表示表达式(2.86)中的单式矩阵, 可将变换(2.80)化为变换(2.33), 此时可以应用 § 2.2~2.6 中得到的全部结果。

至此我们看到, 运算(2.80)同(2.18)式的正交变换是同构的。

最后, 利用关系式(2.89)以及先前得到的等式(2.69)和(2.72)可将凯里-克莱茵参数同欧拉-克雷洛夫角联系起来。

用(2.69)中的量 ν_i 去代替 $\lambda_i (i=0, 1, 2, 3)$, 对于欧拉角得到

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \frac{\psi}{2} e^{i \frac{\varphi+\theta}{2}}, \quad \delta = \cos \frac{\psi}{2} e^{-i \frac{\varphi+\theta}{2}}, \\ \beta &= i \sin \frac{\psi}{2} e^{i \frac{\theta-\varphi}{2}}, \quad \gamma = i \sin \frac{\psi}{2} e^{i \frac{\varphi-\theta}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

利用关系式(2.72), 求出凯里-克莱茵参数同克雷洛夫的关系:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= e^{i \frac{\varphi}{2}} \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\ \delta &= e^{-i \frac{\varphi}{2}} \left(\cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\ \beta &= e^{-i \frac{\varphi}{2}} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + i \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right), \\ \gamma &= -e^{i \frac{\varphi}{2}} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - i \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

第三章 运动学方程

运动学方程将刚体旋转角速度矢量同运动学参数对时间的导数连系起来。运动学方程的形式依运动学参数而定,因此,对于欧拉角、方向余弦和罗德里格-哈密顿参数来说,方程各不相同。研究运动学方程,也就是得出这些方程最好有一个统一的方法。推导方程时,我们将认为,象角速度矢量^[9, 16, 20]这种物理量是读者所熟知的。在这一章里,根据角速度是无限小旋转与时间之比的极限这一概念进行运动学方程的推导。利用四元数确立这些方程,看来,是最通用的方法而且在相应公式化时,所有的运动学参数都使用它。得到了运动学方程的通式。

应用四元数能以最自然的形式表示运动学方程,而这种形式将表征基本旋转(角速度矢量)和有限旋转(四元数分量)的同类型的参数连系起来。因此,使用四元数能够证明运动学方程的通解定理,确立形式解以及研究许多不能用基本函数求出解的简单情况。进行的研究,对于下一章探讨的解法是有利的。

§ 3.1 无限小变换。角速度矢量

旋转变换的四元数,例如(2.41),决定变坐标系 E 为位置 E' 的有限转动矢量。我们研究坐标 E 和 E' 的位置相差一个微量的无限小变换。同这种变换对应的应该是旋转一个无限小角度 $\Delta\theta$ 的四元数。根据四元数表示式(1.11)可以看出,对于 $\Delta\theta$ 精确到二阶微量项的这个四元数的近似值为

$$\Delta\Lambda = 1 + \zeta \frac{\Delta\theta}{2}, \quad (3.1)$$

式中, $\Delta\Lambda$ 是无限小变换的四元数; ζ 是瞬时旋转轴; $\Delta\theta$ 是转角。

现在,假定四元数(3.1)给定旋转变换(2.33),因此,同坐标系固连的矢量 r 转入新的位置 r' 。

进行乘法运算, 可以看出

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \Delta\Lambda \circ \mathbf{r} \circ \Delta\tilde{\Lambda} = \left(1 + \zeta \frac{\Delta\theta}{2}\right) \circ \mathbf{r} \circ \left(1 - \zeta \frac{\Delta\theta}{2}\right) \\ &= \mathbf{r} + \zeta \frac{\Delta\theta}{2} \circ \mathbf{r} - \mathbf{r} \circ \zeta \frac{\Delta\theta}{2} - \zeta \circ \mathbf{r} \circ \zeta \frac{\Delta\theta^2}{4}.\end{aligned}$$

舍去二阶微量项, 我们得到下列矢量的增量:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \zeta \circ \mathbf{r} \frac{\Delta\theta}{2} - \mathbf{r} \circ \zeta \frac{\Delta\theta}{2} = (\zeta \Delta\theta) \times \mathbf{r}. \quad (3.2)$$

在公式(3.2)中, 曾利用了以矢量乘法表示四元数乘法的表达式(1.8)。

等式(3.2)两端同除以 Δt 并取极限, 我们得到

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\zeta \frac{d\theta}{dt}\right) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (3.3)$$

这一等式使我们认识到, 量

$$\zeta \frac{d\theta}{dt}$$

等于坐标 E' 相对于 E 运动的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 。根据这一点, 无限小变换四元数(3.1)也可写成这种形式:

$$\Delta\Lambda = 1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\Delta t, \quad d\Lambda = 1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}dt. \quad (3.4)$$

使角速度矢量同无限小转动四元数连系起来的上述结论, 具有例证的性质。实际上, 我们完全可以根据角速度矢量定义为无限小转动矢量对时间 dt 之比并根据基本定理1.1和关系式(2.51)立即写出关系式(3.4)。

在方向余弦的情况下, 通过无限小变换的阵元引入角速度矢量。矢量变换(2.18)给定矩阵变换 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, 该矩阵可表示为单位矩阵和对应于微量变换的某一矩阵之和:

$$\mathbf{B} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

这种矩阵几乎给定一个恒等变换, 其间相差一个无限小算子。根据(2.18), 我们有:

$$\mathbf{r}' = (1 + \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r},$$

即

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}, \quad (3.5)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是无限小增量的算子。

逆变换矩阵

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon},$$

因为在这种情况下, 满足对于 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 准确到二阶微量项的关系式

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{1},$$

但对正交矩阵来说, 逆矩阵同转置矩阵相等, 因此

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^T = \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = -\boldsymbol{\varepsilon}.$$

这样一来, 无限小变换矩阵是反对称矩阵, 就是说, 具有下列形式:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = -\varepsilon_{ji},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & 0 & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\Delta\theta_3 & \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 & 0 & -\Delta\theta_1 \\ -\Delta\theta_2 & \Delta\theta_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

研究该矩阵对时间 Δt 之比而且用 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示 $\Delta t \rightarrow 0$ 时这一比例的极

限, 用 ω_i 表示 $\frac{d\theta_i}{dt}$, 便得到

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

同三维空间中每个反对称矩阵对应的是以 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为分量的矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 。矩阵诸元同矢量分量的关系, 形式上借助于列维-契维特符号 δ_{ijk} 确定。如果下标 i, j, k 中间有相同的, 则该符号等于零, 而根据置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ 的奇性或偶性●它等于 $+1$ 或 -1 。确定矩阵 $\|\varepsilon_{ij}\|$ 同矢量分量之间关系的关系式, 具有这样的形式:

$$\Delta\theta_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \delta_{ijk} \varepsilon_{jk}. \quad (3.7)$$

● 所谓置换 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ 的奇性和偶性, 读者可参阅《高等代数教程》(库洛什著, 柯召译, 高等教育出版社出版, 1955年)。——校者

矩阵 ε 的三个量 $d\vartheta_i$ (或 $d\delta_i$) 是决定旋转的三个独立参数。将值 ε 代入 (3.5), 对于矢量的增量便得到

$$d\mathbf{r}_1 = r_3 d\delta_2 - r_2 d\delta_3,$$

$$d\mathbf{r}_2 = r_1 d\delta_3 - r_3 d\delta_1,$$

$$d\mathbf{r}_3 = r_2 d\delta_1 - r_1 d\delta_2,$$

这也可写成矢量等式的形式

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{r}$$

或

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_0.$$

既然量 $\boldsymbol{\omega}$ 决定于旋转变换四元数的矢量部分, 所以根据定理 2.2, 它是矢量。由此得出结论, 四元数 $d\Lambda$ (3.4) 分量确定的量 ω_i 是角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ (正象四元数一样) 在任意坐标系 (其中包括基 \mathbf{E} 在内) 上的投影。显然, 在该情况下, 基 \mathbf{E} 和 \mathbf{E}' 上的投影相同, 因为 $d\Lambda$ 决定两基间的转换。

最后, 我们研究四元数 $d\Lambda_1$ 和 $d\Lambda_2$ 确定的两无限小变换的顺序。合成变换将等于

$$d\Lambda = d\Lambda_2 \circ d\Lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_2 dt\right) \circ \left(1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1 dt\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) dt + \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega}_2 \circ \boldsymbol{\omega}_1 dt^2 \approx 1 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) dt,$$

就是说, 进行无限小转动相加以及与此相应地进行角速度相加都准确到二阶微量。我们发现乘法的顺序在这里不起作用。这说明, 矢量 $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ 在相邻坐标系上准确到二阶微量的投影是相同的。

将所得公式与微量旋转的四元数的乘法规则分别加以描述是有益的。

根据 (3.4), 准确到转角 ϑ 二阶微量的微量旋转的四元数可表成如下形式:

$$\Delta\Lambda = 1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} + o(\vartheta),$$

式中, $\boldsymbol{\theta} = \zeta \vartheta$ 是无限小转动矢量。准确到二阶微量项的微量变换四元数的乘法公式将是这样的:

$$\begin{aligned}
 \Delta\Lambda_3 &= \Delta\Lambda_1 \circ \Delta\Lambda_2 \\
 &= \left[1 + \frac{1}{2} \theta_1 + o(\vartheta_1) \right] \circ \left[1 + \frac{1}{2} \theta_2 + o(\vartheta_2) \right] \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 + o(\vartheta_1 \vartheta_2) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \theta_3 + o(\vartheta_3).
 \end{aligned}$$

由此可见, 无限小转动可以象矢量一样相加。

§ 3.2 运动学方程的推导

推导运动学方程时, 应该注意到, 实际上获得应用的是这样的方程: 在这种方程中讨论的对象是活动坐标系相对于原始坐标系运动的角速度矢量 ω 在这个原始坐标系或活动坐标系上的 (往往不是任何基上的) 投影。

这就说明了为什么在运动学方程中, 使用四元数在初始和最终变换基上的投影, 即罗德里格-哈密顿参数。我们介绍运动学方程的两种推导。

I. 我们将研究原始坐标系 I 和以角速度 ω 相对于它运动的坐标系 E 。假定从基 I 到基 E 的转换借助于 (2.44) 的旋转运算由四元数 Λ 确定, 我们将这种运算写成下列形式:

$$E = \Lambda \circ I \circ \tilde{\Lambda}. \quad (3.8)$$

由于基的相对运动, 四元数 Λ 将是变量。这意味着, 四元数分量 $\lambda_i (i=0, 1, 2, 3)$ 将是时间函数 $\lambda_i(t)$, 而且根据这一点, 还将用时间函数 $\Lambda(t)$ 来表示四元数 Λ 。为了获得四元数分量的速度改变量, 我们研究坐标 E 在时刻 t 和 $t+dt$ 的两个相邻的位置。显然, 这些位置由四元数 $\Lambda(t)$ 和 $\Lambda(t+dt)$ 相对于原始基 I 来确定。另一方面, 在时刻 t 和 $t+dt$,

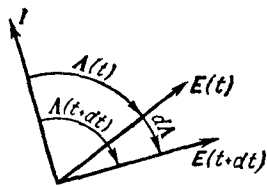


图 3.1

基 E 的相互位置将依基 E 运动的角速度而定并决定于无限小位移的四元数 $d\Lambda$ (图 3.1)。

由此不难得出四元数 $\Lambda(t)$, $\Lambda(t+dt)$ 和 $d\Lambda$ 之间的关系。但我们首先考虑, 所得等式应投影到哪些坐标系上, 就是说, 应使用给定四元数的哪些映象。此时应从下述事实出发: 四元数 $d\Lambda$ 或者用坐标系 \mathbf{E} 的轴上的投影或者用基 \mathbf{I} 上的投影表示, 在前一种情况下, 角速度在固连坐标系上的投影将是四元数分量; 在后一种情况下, 固定坐标系上的投影将是 $d\Lambda$ 分量。

当用 \mathbf{E} 轴上的投影表示四元数 $d\Lambda$ 分量时, 我们使用定理 2.4, 根据这个定理, 每一变换的特征四元数都以下列方式相乘:

$$\Lambda^*(t+dt) = \Lambda^*(t) \circ d\Lambda^*.$$

在这里, 四元数 $\Lambda^*(t+dt)$ 和 $\Lambda^*(t)$ 以罗德里格-哈密顿参数作为分别变基 \mathbf{I} 为基 $\mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{E}(t+dt)$ 的变换分量。四元数 $d\Lambda^*$ 以角速度在固连坐标系 $\mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{E}(t+dt)$ 上的等值投影作为分量。利用四元数 $d\Lambda$ 表示式 (3.4) 并以 $\omega_{\mathbf{E}}$ 表示矢量 ω 在基 \mathbf{E} 上的四元数映象, 最后便得到:

$$\Lambda^*(t+dt) = \Lambda^*(t) \circ \left(1 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{E}} dt\right). \quad (3.9)$$

我们回到定理 2.3, 根据这个定理, 构成转动 $\Lambda(t+dt)$ 的转动 $\Lambda(t)$ 和 $d\Lambda$ 之和可投影到同一个基上。此时, 为了在合成关系式中得到变换的特征四元数 (由罗德里格-哈密顿参数组成的四元数), 仅能用基 \mathbf{I} 作为进行投影的基。对于基 $\mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{E}(t+dt)$ 来说, 无论是四元数 $\Lambda(t+dt)$ 或四元数 $\Lambda(t)$ 都将不是变换的特征四元数。根据定理 2.3, 我们有:

$$\begin{aligned} \Lambda^*(t+dt) &= \Lambda_{\mathbf{I}}(t+dt) \\ &= d\Lambda_{\mathbf{I}} \circ \Lambda_{\mathbf{I}}(t) = d\Lambda_{\mathbf{I}} \circ \Lambda^*(t), \end{aligned}$$

就是说, 角速度矢量在原始 (固定) 坐标系上的投影将是四元数分量 $d\Lambda_{\mathbf{I}}$ 。利用表示式 (3.4), 我们将所得关系式写成这种形式:

$$\Lambda^*(t+dt) = \left(1 + \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{I}} dt\right) \circ \Lambda^*(t). \quad (3.10)$$

关系式 (3.9) 和 (3.10) 是运动学方程的两种形式。这种形式的方程, 对于一切数值解法都有意义, 因为, 它们将下一时刻的四

元数值同这一时刻的四元数值连系起来。

但是,常常使用描述运动学方程的另一种形式。我们考虑量

$$\frac{\Lambda^*(t+dt) - \Lambda^*(t)}{dt},$$

它象四维矢量一样,是四元数的形式导数:

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} = \frac{d\lambda_0^*}{dt} + \mathbf{i}_1 \frac{d\lambda_1^*}{dt} + \mathbf{i}_2 \frac{d\lambda_2^*}{dt} + \mathbf{i}_3 \frac{d\lambda_3^*}{dt}.$$

当然,这个导数是在基 \mathbf{I} (它是超复数空间 \mathbf{H} 的组成部分) 不变这一前提下得到的。可以看出,考虑这一等式,运动学方程 (3.9) 和 (3.10) 也可相应地写成:

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} = \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \omega_E, \quad (3.11)$$

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} = \frac{1}{2} \omega_I \circ \Lambda^*. \quad (3.12)$$

我们发现,四元数 Λ^* 通过旋转运算 (3.8) 给定从基 \mathbf{I} 到基 \mathbf{E} 的转换。根据定理 2.1, 角速度不变矢量的分量变换, 决定于为超复数映象所实现的旋转的逆运算, 即

$$\omega_E = \tilde{\Lambda}^* \circ \omega_I \circ \Lambda^*. \quad (3.13)$$

显然, 关系式 (3.13) 一义地满足方程 (3.11) 和 (3.12)。方程 (3.9) 和 (3.10) 对应于球面上四元数相加的两种可能情况 (图 3.2)。根据该图,

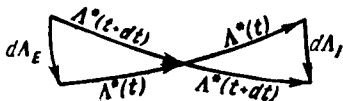


图 3.2

$$\Lambda^*(t+dt) = d\Lambda_I \circ \Lambda^*(t)$$

$$= \Lambda^*(t) \circ d\Lambda_E,$$

而弧 $d\Lambda_I$ 和 $d\Lambda_E$ 的关系由等式 (3.13) 表达的转换运算所确定。

II. 运动学方程还可由另一种方法得到。假定, 从基准基 \mathbf{I} 到基 \mathbf{E} 的转换决定于四元数 Λ (3.8)。于是, 任何单位矢, 一般说来, 也象基 \mathbf{E} 中任何不动的矢量一样, 其变换决定于这种运算:

$$\mathbf{r}' = \Lambda^* \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}^*.$$

研究原始基中 \mathbf{r}' 的变化, 即仅仅由于 Λ^* 的变化而产生的运动, 便得到矢径的导数值

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \frac{d\Lambda^*}{dt} \circ \mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}^* + \Lambda^* \circ \mathbf{r} \circ \frac{d\tilde{\Lambda}^*}{dt} \\ &= \frac{d\Lambda^*}{dt} \circ \tilde{\Lambda}^* \circ \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \circ \frac{d\Lambda^*}{dt} \circ \tilde{\Lambda}^*, \end{aligned} \quad (3.14)$$

这是因为 $\mathbf{r} \circ \tilde{\Lambda}^* = \tilde{\Lambda}^* \circ \mathbf{r}'$ 和 $\Lambda^* \circ \mathbf{r} = \mathbf{r}' \circ \Lambda^*$, 而且从等式 $\Lambda^* \circ \tilde{\Lambda}^* = 1$ 得出如下结论:

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} \circ \tilde{\Lambda}^* + \Lambda^* \circ \frac{d\tilde{\Lambda}^*}{dt} = 0,$$

就是说

$$\frac{d\tilde{\Lambda}^*}{dt} = -\tilde{\Lambda}^* \circ \frac{d\Lambda^*}{dt} \circ \tilde{\Lambda}^*, \quad (3.15)$$

而四元数的导数解释为(3.11), 就是说, 是四元数相对于基准基的局部变化。另一方面, 在基 \mathbf{E} 中不动矢量的导数决定于关系式(3.3)。为了得到量 $\frac{d\Lambda^*}{dt}$ 同角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系, 必须将矢量等式(3.3)表成四元数乘积的形式

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_1 \circ \mathbf{r}' - \mathbf{r}' \circ \boldsymbol{\omega}_1), \quad (3.16)$$

这可从表示式(1.8)得出, 该式中

$$\boldsymbol{\omega}_I = \Omega_1 \mathbf{i}_1 + \Omega_2 \mathbf{i}_2 + \Omega_3 \mathbf{i}_3 \quad (3.17)$$

是矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在原始基轴上的投影所组成的四元数, 即 $\boldsymbol{\omega}$ 在 \mathbf{I} 上的映象。

比较关系式(3.14)和(3.16), 立即得到

$$\boldsymbol{\omega}_I = 2 \frac{d\Lambda^*}{dt} \circ \tilde{\Lambda}^*, \quad (3.18)$$

从此得出运动学方程的一种形式(3.12)。考虑到四元数映象 $\boldsymbol{\omega}_E$ 是 $\boldsymbol{\omega}_I$ 通过运算(3.13)得到的, 由(3.18)便得到另一种形式的方程(3.11)。

由关系式(3.11)得

$$\boldsymbol{\omega}_E = 2\tilde{\Lambda}^* \circ \frac{d\Lambda^*}{dt}, \quad (3.19)$$

而这个四元数之值

$$\omega_E = \omega_1 \dot{\mathbf{i}}_1 + \omega_2 \dot{\mathbf{i}}_2 + \omega_3 \dot{\mathbf{i}}_3 \quad (3.20)$$

决定于矢量 ω 在固连坐标系 E 上的投影。

利用表示式(3.17)和(3.20)，我们将把通过变换四元数的导数确定角速度矢量分量的方程(3.18)和(3.19)写成标量关系式(在这里和以后，我们将略去四元数分量的星号，从而理解为运动学方程中只有罗德里格-哈密顿参数)：

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= 2(\lambda_0 \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_0 \lambda_1 + \lambda_2 \dot{\lambda}_3 - \dot{\lambda}_2 \lambda_3), \\ \Omega_2 &= 2(\lambda_0 \dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_0 \lambda_2 + \lambda_3 \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3 \lambda_1), \\ \Omega_3 &= 2(\lambda_0 \dot{\lambda}_3 - \dot{\lambda}_0 \lambda_3 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_2 \lambda_1); \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 2(\dot{\lambda}_1 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_1 + \lambda_3 \dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_2 \lambda_3), \\ \omega_2 &= 2(\dot{\lambda}_2 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_3 - \dot{\lambda}_3 \lambda_1), \\ \omega_3 &= 2(\dot{\lambda}_3 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_3 + \lambda_2 \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_1 \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

方程(3.21)和(3.22)决定角速度值，它是运动的物理特性而且可以测量。可以证明，速度[即方程组(3.21)和(3.22)中的导数 $\dot{\lambda}_i$]系数的行列式永远等于1[●]。这意味着，首先，方程组的反演永远可以实行；其次，(3.11)和(3.12)型的运动学方程，对任何参数值都不退化。这种性质对于应用，特别是用数值法解方程时十分重要。

我们将方程(3.11)和(3.12)写成标量关系式

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\omega_1 \lambda_1 - \omega_2 \lambda_2 - \omega_3 \lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1 \lambda_0 + \omega_3 \lambda_2 - \omega_2 \lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2 \lambda_0 + \omega_1 \lambda_3 - \omega_3 \lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3 \lambda_0 + \omega_2 \lambda_1 - \omega_1 \lambda_2; \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\Omega_1 \lambda_1 - \Omega_2 \lambda_2 - \Omega_3 \lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \Omega_1 \lambda_0 + \Omega_2 \lambda_3 - \Omega_3 \lambda_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \Omega_2 \lambda_0 + \Omega_3 \lambda_1 - \Omega_1 \lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \Omega_3 \lambda_0 + \Omega_1 \lambda_2 - \Omega_2 \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

我们又一次发现，运动学方程描述一坐标系相对另一坐标系

● 在方程组(3.21)和(3.22)中速度 $\dot{\lambda}_i$ 系数构成的行列式并非永远等于1，但是它总具有非零的行列式，因此方程组的反演总是可以实行的。——校者

的运动, 所以, 方程中研究的对象是相对角速度的矢量。

最后, 我们研究一下, 相对运动怎样进行相加。

假定四元数 Λ^* 给定从坐标系 I 到坐标系 E 的转换, 而四元数 M^* 给定从坐标系 E 到 E' 的转换。假定坐标系 E 相对于坐标系 I 的角速度等于 ω_1 , 而坐标系 E' 相对于坐标系 E 的角速度等于 ω_2 。根据 (3.11) 和 (3.12), 描述坐标系运动的运动学方程, 具有这种形式:

$$\dot{\Lambda}^* = \frac{1}{2} \omega_{1I} \circ \Lambda^* = \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \omega_{1E}. \quad (3.25)$$

类似地, 这种形式的关系式也决定基 E' 相对基 E 的相对运动:

$$\dot{M}^* = \frac{1}{2} \omega_{2E} \circ M^* = \frac{1}{2} M^* \circ \omega_{2E'}, \quad (3.26)$$

式中, ω_{2E} 和 $\omega_{2E'}$ 是矢量 ω_2 在原始基 (E) 和固连基 (E') 上的投影组成的四元数。

我们研究合成四元数 N^* 。正如从定理 2.4 所看到的, 对于罗得里格-哈密顿参数组成的特征四元数来说, 关系式

$$N^* = \Lambda^* \circ M^*$$

是正确的。对这个等式两端微分, 我们得到

$$\frac{dN^*}{dt} = \frac{d\Lambda^*}{dt} \circ M^* + \Lambda^* \circ \frac{dM^*}{dt}.$$

根据 (3.25) 和 (3.26) 的前两个等式, 于其中代入构成四元数的导数值:

$$\begin{aligned} \frac{dN^*}{dt} &= \frac{1}{2} \omega_{1I} \circ \Lambda^* \circ M^* + \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \omega_{2E} \circ M^* \\ &= \frac{1}{2} \omega_{1I} \circ N^* + \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \omega_{2E} \circ \tilde{\Lambda}^* \circ N^*. \end{aligned}$$

既然矢量 ω_2 在基 E 上的投影通过 (3.13) 的运算同它在基 I 上的投影连系起来, 所以, 矢量 ω_2 在基 I 上的映象

$$\omega_{2I} = \Lambda^* \circ \omega_{2E} \circ \tilde{\Lambda}^*.$$

将这个关系式代入上面所得等式, 便得到

$$\frac{d\mathbf{N}^*}{dt} = \frac{1}{2}(\omega_{1I} + \omega_{2I}) \circ \mathbf{N}^*, \quad (3.27)$$

就是说, 复合运动的运动学方程具有(3.12)的形式, 在这个方程中, 把矢量 ω_1 和 ω_2 在同一基(原始基)上的映象表示的角速度进行了相加。等式(3.27)表示相对运动相加时角速度相加的这个熟知的运动学定律。

同理, 研究(3.25)和(3.26)的后两个等式, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}^*}{dt} &= \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \omega_{1E} \circ \mathbf{M}^* + \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \mathbf{M}^* \circ \omega_{2E'} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{N}^* \circ \tilde{\mathbf{M}}^* \circ \omega_{1E} \circ \mathbf{M}^* + \frac{1}{2} \mathbf{N}^* \circ \omega_{2E'} \circ \end{aligned}$$

矢量 ω_1 在基 E' 上的投影决定于同基变换运算相逆的旋转运算:

$$\omega_{1E'} = \tilde{\mathbf{M}}^* \circ \omega_{1E} \circ \mathbf{M}^*,$$

由此得出,

$$\frac{d\mathbf{N}^*}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{N}^* \circ (\omega_{1E'} + \omega_{2E'}), \quad (3.28)$$

就是说, 方程具有(3.11)的形式而且在其中进行角速度矢量相加。我们发现, 如考虑到坐标系 E' 相对于坐标系 I 的速度等于 $\omega_1 + \omega_2$, 则从(3.11)和(3.12)可立即得出关系式(3.27)和(3.28)。所得结论形象地说明了运动学关系式的正确性。

§ 3.3 其它参数的运动学方程

I. 方向余弦

为了推导连系方向余弦的导数同角速度矢量的分量的运动学方程, 我们研究关系式(2.18), 这个关系式给出在正交变换的情况下变一矢量为另一矢量的变换。同该关系式对应的是矩阵等式(2.17)。将阵矩 \mathbf{A}^T 换成与之相等的矩阵 \mathbf{B} 之后, 我们写出这些等式:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{B}\mathbf{r}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{B}\mathbf{R}. \quad (3.29)$$

这个变换描述了固连的活动坐标系中不变的矢量由于基运动而产生的变化。原始基 I 和终止基 E 中 \mathbf{r} 的分量是相同的, 由此得

出结论, 矩阵 \mathbf{R} 是常值矩阵。

研究矢量由于基运动而产生的变化, 对于矩阵关系式(3.29)得到

$$\dot{\mathbf{R}}' = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{R} = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T\mathbf{R}' \quad (3.30)$$

另一方面, 在 § 3.1 中曾研究了无限小变换时矢量分量的变化(3.5)。

我们求量 $\dot{\mathbf{R}}'$ 同角速度间的关系。假定我们有两个相邻的量 $\mathbf{R}'(t+dt)$ 和 $\mathbf{R}'(t)$, 它们相差一个无限小算子(3.5):

$$\mathbf{R}'(t+dt) = (1+\epsilon)\mathbf{R}'(t)。$$

由这一关系式得到

$$\Delta\mathbf{R}' = \mathbf{R}'(t+dt) - \mathbf{R}'(t) = \epsilon\mathbf{R}'(t);$$

两端同除以 dt 并取极限, 我们得到

$$\dot{\mathbf{R}}' = (d\epsilon/dt)\mathbf{R}' = \Omega\mathbf{R}', \quad (3.31)$$

式中, $d\epsilon/dt$ 是角速度矩阵(3.6)。

我们发现, 等式(3.31)是矢量关系式(3.3)的矩阵写法。此外, 因为关系式(3.29)描述矢量 \mathbf{r} 相对于原始基的运动, 所以, 矩阵 \mathbf{R} 和 \mathbf{R}' 以及角速度矩阵 Ω 的诸元分别是矢量 \mathbf{r} 、 \mathbf{r}' 和 ω 在固定坐标系 \mathbf{I} 上的投影。因此, 等式(3.31)中, 矩阵 Ω 的下标将以基的符号表示。因为矢量 ω 在基 \mathbf{I} 上的投影以量 $\Omega_1(\omega = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 + \Omega_3\mathbf{i}_3)$ 表示, 所以

$$\Omega_I = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{vmatrix}。$$

比较关系式(3.31)和(3.30), 我们得到

$$\Omega_I = \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T \quad (3.32)$$

表达式(3.32)右乘以非零矩阵 \mathbf{B} , 我们得到 $(\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{1})$

$$\dot{\mathbf{B}} = \Omega_I\mathbf{B} \quad (3.33)$$

这是方向余弦的运动学方程的第一种形式, 其中含有角速度矢量在固定基上的投影。

为了得到方程的第二种形式, 我们研究矩阵 Ω_I , 显然, 它是矩

阵算子。在 § 2.1 中曾经证明, 基变换时, 矩阵算子进行相似变换 (2.27)。既然 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$, 所以根据 (2.27), 基 \mathbf{E} 的算子 Ω (我们以 Ω_E 表示它) 将通过下述相似变换同 Ω_I 连系起来:

$$\Omega_E = \mathbf{B}^T \Omega_I \mathbf{B}. \quad (3.34)$$

关系式 (3.34) 能求出角速度矢量 ω 在基 \mathbf{E} 上的投影。这些分量决定于所得算子

$$\Omega_E = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix},$$

式中, $\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$, 而 ω_i 是矢量 ω 在基 \mathbf{E} 上的投影。

根据 (3.34), 把用 Ω_E 表示的角速度矩阵 Ω_I 代入 (3.33), 便得到第二种形式的运动学方程, 其中含有角速度在固连坐标系上的投影值:

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \Omega_E. \quad (3.35)$$

我们立即看出, (3.33) 和 (3.35) 型运动学方程相应地同 (3.12) 和 (3.11) 型方程相似。

当正交变换采用矩阵 \mathbf{A} 的那种形式给出时, 考虑到

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}} = 0, \quad \dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{B},$$

从 (3.33) 和 (3.35) 便得到矩阵 \mathbf{A} 的运动学方程。我们有

$$\dot{\mathbf{A}} = -\Omega_E \mathbf{A} = -\mathbf{A} \Omega_I. \quad (3.36)$$

与关系式 (3.32) 类似, 从等式 (3.35) 出发, 我们能以方向余弦及其导数的函数形式得出由角速度矢量在固连基轴上的投影确定的矩阵:

$$\Omega_E = \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{B}} = -\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T. \quad (3.37)$$

既然正交变换矩阵的行列式等于 1, 则方程 (3.32) 和 (3.37) 的反演永远可以实行, 所以运动学方程 (3.33)、(3.35) 和 (3.36), 对任何参数值, 即刚体处于任何位置时都不退化。

我们以标量形式写出运动学方程。因为在描述正交变换时常采用矩阵 \mathbf{A} , 所以在确立诸元 a_{ij} 的方程时要注意到 $b_{ij} = a_{ji}$ 。利

用方程(3.36), 我们写出下面 18 个标量方程, 这些方程是泊松方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_{1i} &= -\omega_2 a_{3i} + \omega_3 a_{2i}, \quad \dot{a}_{k1} = -\Omega_3 a_{k2} + \Omega_2 a_{k3}, \\ \dot{a}_{2i} &= -\omega_3 a_{1i} + \omega_1 a_{3i}, \quad \dot{a}_{k2} = -\Omega_1 a_{k3} + \Omega_3 a_{k1}, \\ \dot{a}_{3i} &= -\omega_1 a_{2i} + \omega_2 a_{1i}, \quad \dot{a}_{k3} = -\Omega_2 a_{k1} + \Omega_1 a_{k2} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

($i, k=1, 2, 3$)

关系式(3.32)和(3.37)决定角速度分量

$$\Omega_E = -\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \quad \text{和} \quad \Omega_I = -\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}$$

的值。我们有

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{a}_{31} a_{21} - \dot{a}_{32} a_{22} - \dot{a}_{33} a_{23} = \dot{a}_{21} a_{31} + \dot{a}_{22} a_{32} + \dot{a}_{23} a_{33}, \\ \omega_2 &= -\dot{a}_{11} a_{31} - \dot{a}_{12} a_{32} - \dot{a}_{13} a_{33} = \dot{a}_{31} a_{11} + \dot{a}_{32} a_{12} + \dot{a}_{33} a_{13}, \\ \omega_3 &= -\dot{a}_{21} a_{11} - \dot{a}_{22} a_{12} - \dot{a}_{23} a_{13} = \dot{a}_{11} a_{21} + \dot{a}_{12} a_{22} + \dot{a}_{13} a_{23}, \\ \Omega_1 &= -\dot{a}_{12} a_{13} - \dot{a}_{22} a_{23} - \dot{a}_{32} a_{33} = \dot{a}_{13} a_{12} + \dot{a}_{23} a_{22} + \dot{a}_{33} a_{32}, \\ \Omega_2 &= -\dot{a}_{13} a_{11} - \dot{a}_{23} a_{21} - \dot{a}_{33} a_{31} = \dot{a}_{11} a_{13} + \dot{a}_{21} a_{23} + \dot{a}_{31} a_{33}, \\ \Omega_3 &= -\dot{a}_{12} a_{11} - \dot{a}_{22} a_{21} - \dot{a}_{32} a_{31} = \dot{a}_{11} a_{12} + \dot{a}_{21} a_{22} + \dot{a}_{31} a_{32} \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

含有角速度矢量在固连轴或固定轴上的投影的九个泊松运动学方程(3.38), 描述固连基三个单位矢的运动。显然, 只要给定刚体的两个轴, 就可确定它的方位, 因此可以消去任何三个一组的方程。每三个一组的方程描述一个轴的运动, 此时, 有一个连系方程(确定单位矢长度的方程, 即范数方程)。此外, 当一轴的运动给定时(如第一组的三个方程), 另三个方程承担两种连系: 确定单位矢的长度和它对第一个单位矢的正交性。这样一来, 运动学方程组就包括三个独立参数。

方程(3.33)、(3.35)和(3.36)具有运动学方程的最一般的形式, 这种形式同四元数方程(3.11), (3.12)的形式相同。在四元数方程的情况下, 变换四元数和角速度矢量在任何一个基上的四元数映象进行相乘。在方向余弦四元数方程的情况下, 变换矩阵乘以角速度矩阵。我们发现, 从方程(3.33)、(3.35)和(3.36)能够得到任何运动学参数的方程, 如果这些方程仅仅表示正交变换矩阵

(这永远是可能的)。

最后, 我们来证明, 方程(3.33)、(3.35)和(3.36)服从于已知的运动学定律, 相对运动相加时, 根据这个定理进行角速度矢量相加。我们研究两种变换: 由矩阵 \mathbf{A}_1 确定的变基 \mathbf{I} 为基 \mathbf{E} 的转换, 以及由矩阵 \mathbf{A}_2 给定的变基 \mathbf{E} 为基 \mathbf{E}' 的转换。合成变换将由矩阵 $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ 确定。

假定 ω_1 是基 \mathbf{E} 相对于基 \mathbf{I} 的旋转角速度, 而 ω_2 是基 \mathbf{E}' 相对于基 \mathbf{E} 的旋转角速度, 还假定 Ω_1 和 Ω_2 是这些速度的相应矩阵。根据(3.36), 我们有两个确定基 \mathbf{I} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{E}' 相互运动的运动学方程组:

$$\dot{\mathbf{A}}_1 = -\Omega_{1E} \mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_1 \Omega_{1I}, \quad \dot{\mathbf{A}}_2 = -\Omega_{2E'} \mathbf{A}_2 = -\mathbf{A}_2 \Omega_{2E}.$$

微分合成变换的矩阵 \mathbf{A}_3 , 我们得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_3 &= \dot{\mathbf{A}}_2 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \dot{\mathbf{A}}_1 = -\Omega_{2E'} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \Omega_{1E} \mathbf{A}_1 \\ &= -\mathbf{A}_2 \Omega_{2E} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \Omega_{1I}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

矩阵 Ω_{1E} 是“投影”到基 \mathbf{E} 上的算子, 当转换为基 \mathbf{E}' 时, 它进行相似变换:

$$\Omega_{1E'} = \mathbf{A}_2 \Omega_{1E} \mathbf{A}_2^T.$$

考虑到这一点, 由等式(3.40)可得出运动学方程:

$$\dot{\mathbf{A}}_3 = -(\Omega_{1E'} + \Omega_{2E'}) \mathbf{A}_3,$$

这是以角速度 $\omega_1 + \omega_2$ 运动的运动学方程的第一种形式。

如果在基 \mathbf{I} 中表示算子 Ω_{2E} , 则它将具有这种形式:

$$\Omega_{2I} = \mathbf{A}_1^T \Omega_{2E} \mathbf{A}_1,$$

由于这一点, 由等式(3.40)得到运动方程的第二种形式

$$\dot{\mathbf{A}}_3 = -\mathbf{A}_3 (\Omega_{1I} + \Omega_{2I}).$$

在这个方程中也进行角速度分量的相加。

II. 欧拉-克雷洛夫角

以欧拉或克雷洛夫角为参数的运动学方程, 是众所周知的^[9, 16, 13], 因此, 我们十分扼要地讲一讲这个问题。相应地利用矩阵(2.67)或(2.70), 由关系式(3.32)和(3.37)可以得到角速度矢量的分量同欧拉或克雷洛夫角的导数的关系。但是, 利用角速度

矢量等于各相对分运动的角速度矢量之和这样一个事实, 就比较容易得出上述关系。因为, 变换是依次由角度为 φ , ϑ 和 ψ 的三个平面转动所给定, 所以, 每次旋转的角速度都指向转动轴且等于 $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$ 和 $\dot{\psi}$ 。由图 2.1, 对于欧拉角, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\psi} \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \psi \sin \varphi, & \omega_1 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\vartheta} \sin \psi \cos \varphi, & \omega_2 &= -\dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\varphi} \cos \vartheta \sin \psi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \cos \psi, & \omega_3 &= \dot{\vartheta} + \dot{\varphi} \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

对于克雷洛夫角来说, 根据图 2.2 得到下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\psi} \sin \varphi, & \omega_1 &= \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \sin \psi, \\ \Omega_2 &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi, & \omega_2 &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta + \dot{\psi} \cos \vartheta, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} - \dot{\vartheta} \sin \psi; & \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \psi \cos \vartheta - \dot{\psi} \sin \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

式中 Ω_k 和 ω_k ($k=1, 2, 3$), 也象在 (3.41) 中一样, 是角速度矢量在固定基 (\mathbf{I}) 和固连基 (\mathbf{E}) 上的投影。

由方程 (3.41) 和 (3.42) 的反演就得出运动学方程。对于 $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\vartheta}$ 可解的方程组 (3.41) 的行列式, 等于 $\sin \psi$, 因此, 当 $\psi = k\pi$ ($k=0, 1, \dots$) 时, 方程组 (3.41) 是不可逆的。同这些数值相当的是失去了一个自由度 (旋转轴 φ 和 ϑ 重合)。当 $\psi \neq k\pi$ 时, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \Omega_1 \cos \varphi + \Omega_2 \sin \varphi, & \dot{\psi} &= \omega_1 \cos \vartheta - \omega_2 \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= \Omega_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - \Omega_2 \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, & \dot{\vartheta} &= \omega_3 - \omega_1 \sin \vartheta \operatorname{ctg} \psi \\ & & & - \omega_2 \cos \vartheta \operatorname{ctg} \psi, \\ \dot{\varphi} &= \Omega_3 - \Omega_1 \sin \varphi \operatorname{ctg} \psi & \dot{\varphi} &= \omega_1 \frac{\sin \vartheta}{\sin \psi} + \omega_2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \psi} \\ & & & + \Omega_2 \cos \varphi \operatorname{ctg} \psi, \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

正象从这些方程看到的, 当接近点 $\psi = k\pi$ 时, 角 φ 和 ϑ 的变化速度趋向于无穷大。

求解关于 $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ 和 $\dot{\vartheta}$ 的方程 (3.42) 时, 必须使每个方程组等于 $\cos \psi$ 的行列式不等于零。在点 $\psi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 上, $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\vartheta}$ 的方向

相同而且这样的参数系损失一个自由度。在点 $\psi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 上, 根据式(3.42)我们有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \Omega_2 \cos \varphi - \Omega_1 \sin \varphi, & \dot{\psi} &= \omega_2 \cos \vartheta - \omega_3 \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= \Omega_2 \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} + \Omega_1 \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \dot{\vartheta} &= \omega_1 + \omega_2 \sin \vartheta \operatorname{tg} \psi \\ & & & + \omega_3 \cos \vartheta \operatorname{tg} \psi, \\ \dot{\varphi} &= \Omega_3 + \Omega_1 \cos \varphi \operatorname{tg} \psi & \dot{\varphi} &= \omega_3 \frac{\cos \vartheta}{\cos \psi} + \omega_2 \frac{\sin \vartheta}{\cos \psi} \\ & & & + \Omega_2 \sin \varphi \operatorname{tg} \psi, \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

也正象在前一种情况下一样, 当接近点 $\psi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 时, 尽管 Ω_i 和 ω_i 仍是有穷的, 但角 φ 和 ϑ 的变化速度却趋于无穷。

上面我们提到, 等式(3.41)和(3.42)可由一般关系式(3.32)和(3.37)得到。但是, 运动学方程(3.43)和(3.44)不同列入方向余弦导数(它们是角 φ 、 ϑ 和 ψ 及其导数的组合)的一般方程(3.33)和(3.35)对应。

所以, 刚体进行任何运动时, 运动学方程(3.33)和(3.35)都不退化, 这是欧拉和克雷洛夫角运动学方程时得不到的。

III. 凯里-克莱茵参数

§ 3.2 中利用的运动学方程的推导方法, 象在四元数和方向余弦的情况下一样, 也可用于凯里-克莱茵参数。我们先求无限小变换的凯里-克莱茵参数, 就是说, 确定这些参数同无限小转动矢量的关系, 因此也就是同角速度的关系。为此目的, 最方便的是, 使用按泡里自旋矩阵展开的那种形式的单式变换矩阵表示式(2.87), 即凯里-克莱茵参数表成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \frac{\vartheta}{2} + i\gamma_3 \sin \frac{\vartheta}{2}, & \delta &= \cos \frac{\vartheta}{2} - i\gamma_3 \sin \frac{\vartheta}{2}, \\ \beta &= (\gamma_2 + i\gamma_1) \sin \frac{\vartheta}{2}, & \gamma &= -(\gamma_2 - i\gamma_1) \sin \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

将(2.86)和(2.87)两变换矩阵表示式加以比较, 便得到这些关系

式。这些关系式可用变换的单位矢量的转角和方向余弦的函数表示凯里-克莱茵参数。我们发现, 关系式(3.45)对应于将凯里-克莱茵参数同四元数分量连系起来的等式(2.89)。

根据(3.45), 同无限小变换, 即微小旋转角 $\Delta\theta$ 变换对应的将是矩阵

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + i\gamma_3 \frac{\Delta\theta}{2} & (\gamma_2 + i\gamma_1) \frac{\Delta\theta}{2} \\ -(\gamma_2 - i\gamma_1) \frac{\Delta\theta}{2} & 1 - i\gamma_3 \frac{\Delta\theta}{2} \end{vmatrix},$$

显然, 注意到(3.45)中 $\Delta\theta$ 的一阶微量, 便可得到这一矩阵。我们将几乎为恒等变换的这一矩阵表成单位矩阵和无限小旋矩阵之和:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{1} + \mathbf{U}_d = \mathbf{1} + \begin{vmatrix} i\gamma_3 \frac{\Delta\theta}{2} & (\gamma_2 + i\gamma_1) \frac{\Delta\theta}{2} \\ -(\gamma_2 - i\gamma_1) \frac{\Delta\theta}{2} & -i\gamma_3 \frac{\Delta\theta}{2} \end{vmatrix}. \quad (3.46)$$

我们研究矩阵 \mathbf{U}_d 同时间 Δt 之比并取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时这一比例的极限。在这种情况下, 量 $\gamma_i \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 变为角速度矢量的投影值。用 \mathbf{V} 表示比例 $\mathbf{U}_d / \Delta t$ 的矩阵, 便得到

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i\omega_3 & \omega_2 + i\omega_1 \\ -\omega_2 + i\omega_1 & -i\omega_3 \end{vmatrix}. \quad (3.47)$$

利用矩阵的泡里自旋矩阵展开式(2.84), 可以看出:

$$\mathbf{V} = \frac{i}{2} (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3), \quad (3.48)$$

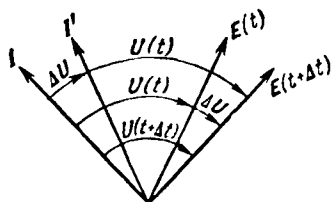


图 3.3

就是说, 角速度矩阵 \mathbf{V} , 象矢量一样, 按“单位矢”展开, 自旋矩阵就是这种单位矢。自然, 四元数和自旋矩阵在这里表现完全相同。由此可见, 考虑(3.47)的无限小变换矩阵, (3.46)可表成下列形式:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{1} + \mathbf{V} \Delta t. \quad (3.49)$$

现在, 我们可以转到建立运动学方程的问题上。假定基 \mathbf{E} 单位矢相对原始基 \mathbf{I} 的位置, 决定于单式矩阵 \mathbf{U} 给定的变换(2.80)。我们研究量 $\mathbf{U}(t)$ 和 $\mathbf{U}(t + \Delta t)$ 给定的基 \mathbf{E} 的两个相邻位置。显然, 矩阵 $\mathbf{U}(t + \Delta t)$ 给定的、在 $t + \Delta t$ 时刻变基 \mathbf{I} 为基 \mathbf{E} 的转换可表成变换 $\mathbf{U}(t)$ 和无限小变换 $\Delta \mathbf{U}$ 之和(图 3.3)。

根据算子乘法规则, 变换相加时我们有

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \Delta \mathbf{U} \mathbf{U}(t).$$

应该看到, 因为矩阵 $\Delta \mathbf{U}$ 给定基 \mathbf{E} 两位置之间的转换, 所以角速度矩阵 \mathbf{V} 应以角速度矢量在固连轴上的投影作为分量。根据这一点, 在所得表达式中, 无限小转动矩阵(3.49)将以角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在基 \mathbf{E} 轴上的投影值作为自己的分量, 即我们用 ω_i 表示的量。根据(3.49), 以及所列举的情况, 替换所得表达式中的矩阵 $\Delta \mathbf{U}$, 并以基的符号表示矩阵 \mathbf{V} :

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}(t) + \mathbf{V}_E \mathbf{U}(t) \Delta t.$$

令

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{U}(t + \Delta t) - \mathbf{U}(t)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}(t),$$

并根据矩阵微分规则得到

$$\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} & \dot{\delta} \end{bmatrix}_E.$$

取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限, 便得到凯里-克莱茵参数运动学方程的第一种形式:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{V}_E \mathbf{U}. \quad (3.50)$$

该方程右乘以同矩阵 \mathbf{U} 埃尔米特共轭的矩阵, 立即得到:

$$\mathbf{V}_E = \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^+. \quad (3.51)$$

我们当即看出: 关系式(3.50)和(3.51)同类似的方程(3.35)和(3.37)在形式上是相同的, 以及(3.50)同(3.11)也是相同的。公式(3.36)、(3.50)和(3.11)中不同的相乘顺序, 是因为所述的依次变换算子和特征四元数的相乘顺序(见定理 2.4)引起的。我们把这些方程写成坐标形式。由方程(3.50)我们有

$$\begin{vmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} & \dot{\delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i\omega_3 & \omega_2 + i\omega_1 \\ -\omega_2 + i\omega_1 & -i\omega_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

矩阵相乘, 则得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{i\omega_3}{2} \alpha + \frac{\omega_2 + i\omega_1}{2} \gamma, & \dot{\beta} &= \frac{i\omega_3}{2} \beta + \frac{\omega_2 + i\omega_1}{2} \delta, \\ \dot{\gamma} &= -\frac{i\omega_3}{2} \gamma + \frac{i\omega_1 - \omega_2}{2} \alpha, & \dot{\delta} &= -\frac{i\omega_3}{2} \delta + \frac{i\omega_1 - \omega_2}{2} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

我们注意到, 在所列举的四个方程中, 第二对(β 和 δ)是第一对(α 和 γ)的推论, 如果考虑凯里-克莱茵参数之间的关系(2.78)(它是同第一对方程复数共轭的), 从第一对方程就可得到它。如果通过四元数元素(2.89)来代换 α 和 γ 的表达式, 则可确信, 方程(3.52)可转换成四元数方程(3.23)。应该注意到, 因为在方程(3.52)中 α 和 γ (从而 β 和 δ)是复数, 所以, 对应于方程(3.50)的标量实数方程恰恰就是四元数方程(3.23)。此时, 连系方程(2.78)变为四元数范数方程。

方程的第二种形式含有角速度矢量在固定基轴上的投影, 为了得到这种形式的方程, 我们来研究其它的变换顺序。假定, 在 $t + \Delta t$ 时刻, 坐标系 E 的位置, 如前所述, 决定于单式矩阵 $\mathbf{U}(t + \Delta t)$ 。与前述情况不同, 这个位置可表成无限小变换, 即基 \mathbf{I} 转换为基 \mathbf{I}' , 随之而来的在 $t + \Delta t$ 时刻变基 \mathbf{I}' 为基 \mathbf{E} 的转换, 由矩阵 $\mathbf{U}(t)$ 决定。

这样一来, 如果在前一种情况下, 矩阵 $\mathbf{U}(t + \Delta t)$ 表成矩阵 $\mathbf{U}(t)$ 和 $\Delta\mathbf{U}$ 的顺序(见图3.3), 在这一方案中则顺序相反, 而且矩阵 $\Delta\mathbf{U}$ 已决定于基 \mathbf{I} 中发生的无限小变换。根据这一点, 无限小变换矩阵将含有角速度矢量 ω 在固定基 \mathbf{I} 轴上的投影, 即根据(3.49)和(3.47), 有

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{V}_1 \Delta t = \mathbf{1} + \frac{\Delta t}{2} \begin{vmatrix} i\Omega_3 & \Omega_2 + i\Omega_1 \\ -\Omega_2 + i\Omega_1 & -i\Omega_3 \end{vmatrix}. \quad (3.53)$$

根据上面确定的变换顺序, 得到

$$\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}(t) \Delta\mathbf{U}.$$

除以 dt 并取极限之后, 从这一等式[考虑到(3.53)式]便得到运动学方程的第二形式:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \mathbf{V}_I. \quad (3.54)$$

这一方程右乘以 \mathbf{U}^+ , 便得到角速度矩阵的方程

$$\mathbf{V}_I = \mathbf{U}^+ \dot{\mathbf{U}}. \quad (3.55)$$

我们看到, 运动学方程(3.54)同前面得到的(3.36)和(3.12)形式上是一样的。我们以坐标形式写出方程(3.54):

$$\begin{vmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} & \dot{\delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i\Omega_3 & \Omega_2 + i\Omega_1 \\ -\Omega_2 + i\Omega_1 & -i\Omega_3 \end{vmatrix}.$$

矩阵相乘并使诸元相等, 得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{i\Omega_3}{2} \alpha + \frac{i\Omega_1 - \Omega_2}{2} \beta, & \dot{\gamma} &= \frac{i\Omega_3}{2} \gamma + \frac{i\Omega_1 - \Omega_2}{2} \delta, \\ \dot{\beta} &= -\frac{i\Omega_3}{2} \beta + \frac{\Omega_2 + i\Omega_1}{2} \alpha, & \dot{\delta} &= -\frac{i\Omega_3}{2} \delta + \frac{\Omega_2 + i\Omega_1}{2} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

我们看到, 方程的第二对(γ 和 δ)是第一对(同它们复共轭的方程)的推论。方程(3.56), 也象(3.52)一样, 还不是标量实数方程, 因为参数 α 、 β 、 γ 和 δ 是复数。将方程(3.56)的实数和虚数分开, 考虑到(2.89), 便得到四元数方程(3.24)。

根据(3.51)和(3.55), 我们还可以标量形式写出角速度分量方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i\omega_3 & \omega_2 + i\omega_1 \\ -\omega_2 + i\omega_1 & -i\omega_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} & \dot{\delta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix}, \\ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i\Omega_3 & \Omega_2 + i\Omega_1 \\ -\Omega_2 + i\Omega_1 & -i\Omega_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} & \dot{\delta} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

由此我们有●

● (3.57)与(3.58)似应为:

$$\begin{cases} \omega_1 = -i(-\dot{\alpha}\beta + \dot{\beta}\alpha + \dot{\gamma}\delta - \dot{\delta}\gamma) \\ \omega_2 = -\dot{\alpha}\beta + \dot{\beta}\alpha - \dot{\gamma}\delta + \dot{\delta}\gamma \\ \omega_3 = 2i(-\dot{\gamma}\beta + \dot{\delta}\alpha) = -2i(\dot{\alpha}\delta - \dot{\beta}\gamma), \end{cases} \quad \begin{cases} \Omega_1 = -i(\dot{\beta}\delta - \dot{\delta}\beta - \dot{\alpha}\gamma + \dot{\gamma}\alpha) \\ \Omega_2 = \dot{\beta}\delta - \dot{\delta}\beta + \dot{\alpha}\gamma - \dot{\gamma}\alpha \\ \Omega_3 = 2i(-\dot{\beta}\gamma + \dot{\delta}\alpha) = -2i(\dot{\alpha}\delta + \dot{\beta}\gamma), \end{cases}$$

这样, 将式(2.89)代入上式, 便得出运动的四元数方程(3.22)和(3.21)。——校者

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -i(\dot{\alpha}\beta + \beta\dot{\delta} + \dot{\gamma}\alpha + \delta\dot{\gamma}), \\ \omega_2 &= \dot{\alpha}\beta + \beta\dot{\delta} - \dot{\gamma}\alpha - \delta\dot{\gamma}, \\ \omega_3 &= 2i(\dot{\gamma}\beta + \dot{\delta}\delta) = -2i(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\gamma}); \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= -i(\alpha\dot{\beta} + \gamma\dot{\alpha} + \beta\dot{\delta} + \delta\dot{\gamma}), \\ \Omega_2 &= \alpha\dot{\beta} + \beta\dot{\delta} - \gamma\dot{\alpha} - \delta\dot{\gamma}, \\ \Omega_3 &= 2i(\gamma\dot{\beta} + \delta\dot{\delta}) = -2i(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\gamma}). \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

可以检验, 当把关系式(2.89)代入(3.57)和(3.58)时, 便得到四元数分量的等式(3.22)和(3.21)。因为实际上求解的是实数标量运动方程, 所以, 凯里-克莱茵参数方程恒等于四元数分量方程, 不同之处仅仅是书写形式。下面, 可用方向余弦运动方程的类推法证明, 所得形式的运动学方程(3.50)和(3.54)符合于相对运动加法定律, 相对角速度矢量凭借它进行相加。这可根据旋转运算表示式(2.80)和(1.20)相似这样一点予以证明。此时, 要使用四元数得到的一切结果。

IV. 有限转动矢量方程

因为在运动学参数中间, 有有限转动矢量确定的参数(转角 ϑ 之值和有限转动的单位矢量 ζ), 所以要推导这些参数的运动学方程。因为这些量往往决定于变换四元数的分量, 所以用四元数的运动学方程作为这类参数的方程, 但是, ϑ 和 ζ 的方程形式上不同于四元数方程。

为了推导这些方程, 如我们根据方程(3.19), 便得

$$\omega_E = 2\tilde{\Lambda}^* \circ \dot{\Lambda}^*,$$

式中, ω_E 是角速度矢量在基 E 上的四元数映象; 而 Λ^* 是变换的特征四元数, 就是说, 它的分量是有限转动矢量在基 E 上的投影。

如果在这一方程中以三维空间中的运算代换四元数乘法, 则因为每个四元数的矢量部分都是在一个基上给定, 所以这个方程直接变为矢量方程。因此, 根据(1.9)我们有

$$\omega = 2(\lambda_0 \dot{\lambda}_0 + \lambda_0 \dot{\lambda} - \dot{\lambda}_0 \lambda + \lambda \cdot \dot{\lambda} - \lambda \times \dot{\lambda}).$$

此时, 根据表示式(1.11), 有

$$\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad \lambda = \zeta \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad \dot{\lambda}_0 = -\frac{\dot{\vartheta}}{2} \sin \frac{\vartheta}{2},$$

$$\dot{\lambda} = \dot{\zeta} \sin \frac{\vartheta}{2} + \frac{\dot{\vartheta}}{2} \zeta \cos \frac{\vartheta}{2}.$$

考虑到这些等式, 便得到角速度矢量的方程

$$\omega = \dot{\zeta} \zeta + \dot{\zeta} \sin \vartheta + \dot{\zeta} \times \zeta (1 - \cos \vartheta). \quad (3.59)$$

方程(3.18)是在其它基(\mathbf{I})中所写出的同样运算。我们让读者证明, 它可化为矢量方程(3.59)。

方程(3.59)通过运动学参数及其导数来决定角速度矢量。为了得到运动学方程, 必须解出关于运动学参数的导数的方程(3.59)。使(3.59)同 ζ 进行内积相乘。考虑到 $\zeta \cdot \zeta = 0$, 因为 ζ 是单位矢量, 而 $(\dot{\zeta} \times \zeta) \cdot \zeta = 0$, 我们有

$$\vartheta = \omega \cdot \zeta. \quad (3.60)$$

为了得到矢量 ζ 的导数, 我们利用运动学方程(3.11)并类似于所述方法使它变为矢量方程

$$2(\dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}) = \lambda_0 \omega - \lambda \cdot \omega + \lambda \times \omega.$$

顾及到通过 ϑ 和 ζ 表示 λ_0 和 λ 的等式, 得到

$$-\dot{\vartheta} \sin \frac{\vartheta}{2} + \dot{\vartheta} \dot{\zeta} \cos \frac{\vartheta}{2} + 2\dot{\zeta} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

$$= \omega \cos \frac{\vartheta}{2} - \omega \cdot \zeta \sin \frac{\vartheta}{2} + \zeta \times \omega \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

从该等式消去标量部分, 考虑到

$$\omega \cos \frac{\vartheta}{2} - \dot{\vartheta} \dot{\zeta} \cos \frac{\vartheta}{2} = \omega \cos \frac{\vartheta}{2} - (\omega \cdot \zeta) \zeta \cos \frac{\vartheta}{2}$$

$$= \zeta \times (\omega \times \zeta) \cos \frac{\vartheta}{2},$$

并除以 $\sin \frac{\vartheta}{2} \neq 0$ (我们不讨论相应于恒等变换的 $\vartheta = 0, 2\pi$), 最后得到

$$2\dot{\zeta} = [\zeta \times (\omega \times \zeta)] \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} + \zeta \times \omega. \quad (3.61)$$

可以检验, 方程(3.12)也可化为这样的矢量方程。方程(3.60)和(3.61)是有限转动矢量的运动学方程。

§ 3.4 运动学方程的研究

刚体的运动可借助于各种不同的运动学参数给定, 对于这些参数进行的研究表明, 一般说来, 仅有三种不同类型的参数。这就是方向余弦、欧拉角以及作为罗德里格-哈密顿参数的四元数分量。象有限转动矢量的分量和凯里-克莱茵参数这类参数都可化为四元数参数, 因为它们以不同的方法来确定同一个物理量——绕一轴的等价欧拉旋转。

参数的不同决定于刚体运动或同刚体固连的坐标系的描述方法。在方向余弦的情况下, 固连坐标系相对于原始坐标系的“坐标”位置是已知的。此时, 固连基的每个轴可用不同的方法, 由原始基表示出来(见 §2.1)。在欧拉角的情况下, 刚体位置借助于三次顺序的平面转动给定, 这三次转动之和给出了固连基的等价位置。对于罗德里格-哈密顿参数来说, 刚体位置由绕某一轴(该轴被确定为欧拉旋转轴)的一次等价的平面转动给定。根据这一点, 以角速度函数描述刚体运动的运动学方程, 一般说来, 有三种不同的形式: 方向余弦、欧拉角和四元数方程。

方向余弦运动学方程是九个标量线性方程组, 它满足于作为正交条件的六种关系。这些方程没有奇点, 就是说, 原则上总是可解的。欧拉(和克雷洛夫)角方程是三个独立的线性方程的方程组, 有一个奇点, 参数方程组在这个点退化。四元数方程是四个非退化线性方程的方程组, 它满足于一个四元数范数的连系方程。

在所有的运动学方程中间, 相应地, 在给定刚体运动的方法中间, 使用四元数是最方便的。同方向余弦不同, 通过四元数的形式运算可单值地给定正交变换运算(在方向余弦的情况下, 正象第二章中已经证明了的, 存在有通过正交变换阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 给定运动的两种不同的方法。在四元数的情况下, 有最低数目的非退化参数以及相应地有最低数目的联系式; 在运动学方程数值积分时, 此种情况使这些参数具有极重要的优越性。最后, 使用四元数能够以唯一形式表示两个表征刚体运动的最重要的物理量: 刚体局部运动

特性(角速度)和刚体位置特性(有限转动矢量)。这两个量以瞬时欧拉旋转矢量和等价的欧拉旋转矢量表示。

四元数代数法有可能以空间 \mathbf{H} 矢量明显地表示出这些量, 这个空间始终可以同三维实空间重合。此时, 有限转动矢量和无限小旋转矢量(角速度矢量)具有相同的物理意义。应用其它形式会使变换算子和角速度算子的表示式更加复杂。

所有这一切, 使四元数成为研究刚体运动通性, 特别是研究运动学方程通性所使用的最方便的运动学参数。既然运动学方程描述同一种运动, 自然, 它们可以相互转换。但是, 这种换算并非简单的, 所以将在下面加以讨论。前一节中得到的、以两个算子(变换算子和角速度算子)相乘的一般形式对运动学方程的形式表示, 有可能把四元数情况下得到的结果比较容易地推广到任何运动学参数的情况。

我们研究以(3.11)和(3.12)形式描述的四元数变换的运动学方程, 其中四元数 ω_E 和 ω_I 给定为时间的函数。在标量形式中, 这些方程中的每一个都是四个线性微分方程的方程组(3.23)和(3.24)。角速度矢量在固连基上的投影 ω_i 或在固定基上的投影 Ω_i 是这些方程的系数, 因此, 在一般情况下, 方程的系数是给定的时间函数。

根据线性微分方程的一般理论^[40], 可以预料, 应该有四个线性独立解的解组, 它们构成这些方程的基本解组。这些基本解组可从, 例如, 以四维空间 \mathbf{H} 的单位矢, 即矢量 $(1, 0, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 1, 0)$ 、 $(0, 0, 0, 1)$ 作为初始值的解组而得到。

借助于基本解组, 可把运动学方程的通解表为线性独立解(其数目应该相应于空间 \mathbf{H} 的维数。但是, 用所求四元数同角速度四元数之积对运动学方程(3.11)和(3.12)的算子表示式, 有可能求出运动学方程其它形式的通解。这个解决定于下列定理。

定理 3.1 假定, 在时间函数 $\omega_I(t)$ 或 $\omega_E(t)$ 已知的情况下, 给出了用四元数描述刚体运动的运动学方程(3.11)式或(3.12)

式,还假定该方程的一个解 $\mathbf{N}(t)$ 已知。于是,四元数

$$\Lambda_E = C_E \circ \mathbf{N}(t) \quad (3.62)$$

是方程(3.11)的解,而四元数

$$\Lambda_I = \mathbf{N}(t) \circ C_I \quad (3.63)$$

是方程(3.12)的解,其中 C_E 和 C_I 是常值四元数。就下述意义来说,四元数(3.62)和(3.63)是方程(3.11)和(3.12)的通解,即:这些方程满足于所需初始条件的任意解,都是通过常数 C_I 或 C_E 的适当选择而从(3.62)和(3.63)得到的。

于原始方程(3.11)和(3.12)中代入解(3.62)和(3.63),可立即得出这个定理的证明。在这里应该注意到,四元数积的导数是以通常的方法得到的:

$$\dot{\Lambda}_E = C_E \circ \dot{\mathbf{N}}, \quad \dot{\Lambda}_I = \dot{\mathbf{N}} \circ C_I.$$

为了求出方程(3.11)满足于初始值 Λ_{E0} 的解,四元数常数 C_E 必须由下列数值求取:

$$\Lambda_{E0} = \Lambda_E(0) = C_E \circ \mathbf{N}_0,$$

由此,

$$C_E = \Lambda_{E0} \circ \tilde{\mathbf{N}}_0$$

而解(3.62)具有如下形式

$$\Lambda_E(t) = \Lambda_{E0} \circ \tilde{\mathbf{N}}_0 \circ \mathbf{N}(t). \quad (3.64)$$

同理,方程(3.12)满足于初始条件 Λ_{I0} 的解以下列形式得出:

$$\Lambda_I(t) = \mathbf{N}(t) \circ \tilde{\mathbf{N}}_0 \circ \Lambda_{I0}. \quad (3.65)$$

可以看出, $\tilde{\mathbf{N}}_0 \circ \mathbf{N}(t)$ 是方程(3.11)满足初始值(1, 0, 0, 0)的解,正象方程(3.12)的 $\mathbf{N}(t) \circ \tilde{\mathbf{N}}_0$ 一样,它也满足于这个初始条件。解(3.62)和(3.63)或者表为(3.64)和(3.65)形式的解,都是满足给定初始条件的唯一解。这一点可从唯一性定理看出,因为 $\lambda_i(t) \equiv 0$ ($i=0, 1, 2, 3$)也是运动学方程的解。

我们转到定理的讨论上去。如果从四元数代数出发(亦即假定在四元数集合中可进行线性代数运算),则方程(3.11)和(3.12)形式上是一阶线性方程。因此,将它们的通解写成(3.62)和(3.63)的形式,即特解乘以常值四元数的形式,是十分自然的。

如果允许四元数作为常数, 则可看出, 初始条件 $(1, 0, 0, 0)$ 、 $(0, 1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 1, 0)$ 和 $(0, 0, 0, 1)$ 将不再是线性无关, 就是说, 由它们所确定的解也将是相关的。这一事实证明, 运动学方程有一个基本解。

另一方面, 不难证明, 分析标量方程(3.23)和(3.24)的结果, 也可得出这样的结论。为此, 比方说, 可以使用 4×4 矩阵形式的超复数空间单位矢的表示式●

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在这种情况下, 同满足初始条件 $(1, 0, 0, 0)$ 的上述特解对应的, 将是以矩阵1作为初始矩阵的基本解组。

我们研究所得通解的物理意义。我们将始终认为, 运动学方程的两种形式描述刚体的同一种运动。首先我们注意到, 解 Λ_E (3.64)不能满足方程(3.12), 因为, 将解 Λ_E 代入上述方程, 便得到

$$2\Lambda_{E0} \circ \tilde{\mathbf{N}}_0 \circ \dot{\mathbf{N}}(t) = \Lambda_{E0} \circ \tilde{\mathbf{N}}_0 \circ \mathbf{N} \circ \omega_E = \omega_I \circ \Lambda_{E0} \circ \tilde{\mathbf{N}}_0 \circ \mathbf{N},$$

又因为 $\omega_I = \mathbf{N} \circ \omega_E \circ \tilde{\mathbf{N}}$, 所以, 可以看出, 得到的等式要得到满足, 如果四元数中有一个等于零, 或者它们完全共线, 或者 $\Lambda_{E0} \circ \tilde{\mathbf{N}}_0 = 1$, 这在一般情况下是不可能的。完全一样, 解(3.65)在一般情况下不能满足(3.11)。由此可见, 同(3.11)和(3.12)中每一运动学方程对应的, 是自己的解集 $\Lambda_E(t)$ 和 $\Lambda_I(t)$, 这两个解唯一地由自己的初始条件所确定。

正象刚才所证明的, 解集 $\Lambda_E(t)$ 和 $\Lambda_I(t)$ 不同, 就是说, 诸元

● 这种对应是同构的。

$\Lambda_E(t)$ 在一般情况下不能满足方程(3.12), 而 $\Lambda_I(t)$ 不能满足方程(3.11)。原来, 下述定理是正确的。

定理 3.2 对于刚体的同一种运动来说, 解集在一个点上而且只能在一个点上相交, 就中解 $\mathbf{N}(t)$ 就是属于两集的这个解。

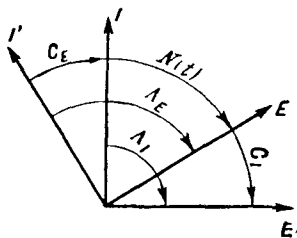


图 3.4

实际上, 在一开始曾假定, $\mathbf{N}(t)$ 满足两种形式的方程。相反地: 由通解(3.62)或(3.63)得到的每个特解, 都决定于初始条件。此时, 解(3.62)仅在唯一的初始条件

$$\Lambda_{E0} \circ \tilde{\mathbf{N}}_0 = 1$$

下满足方程(3.12)。同样地可以检验, 在

$$\tilde{\mathbf{N}}_0 \circ \Lambda_{I0} = 1$$

时, 解(3.63)满足方程(3.11), 而在这些条件下, 解(3.62)和(3.63)就是四元数 $\mathbf{N}(t)$ 。

通解 $\Lambda_E(t)$ 和 $\Lambda_I(t)$ 的物理意义可由图 3.4 说明, 在该图中, 每个基都约定地用矢量表示。四元数 $\mathbf{N}(t)$ 给定变基 \mathbf{I} 为基 \mathbf{E} 的转换, 从而描述由于角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的存在基 \mathbf{E} 相对基 \mathbf{I} 产生的运动。这种运动可从基 \mathbf{I} 观察到。方程(3.12)对应于运动的这种情况。显然, 完全一样, 从基 \mathbf{I} 也将观察到以同一角速度 $\boldsymbol{\omega}$, 相对 \mathbf{I} 旋转的任何其它坐标系 \mathbf{E}' 的运动, 因为这个运动为矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在基 \mathbf{I} 上的同一投影(即四元数 $\boldsymbol{\omega}_I$)所描述。既然基 \mathbf{E} 和 \mathbf{E}' 的运动是以相对基 \mathbf{I} 的同一角速度进行的, 所以它们的相对位置不变而且可由常值四元数 \mathbf{C}_I 给定。这样一来, 通解(3.63)合乎任意基 \mathbf{E} 相对基 \mathbf{I} 运动的描述, 这种运动是由基 \mathbf{I} 观察到的而且是由函数 $\boldsymbol{\omega}_I(t)$ 给定的。

根据所述情况类推, 通解(3.62)对应于基 \mathbf{E} 的运动, 这种运动不仅相对于原始基 \mathbf{I} 的运动, 而且就相对基 \mathbf{I} 转动一固定角度(该角度由四元数 \mathbf{C}_E 确定)而得的任何其它基 \mathbf{I}' 的运动作了描述。此时, 从固连基 \mathbf{E} 进行运动的观察。与此对应的是方程

(3.11), 因为从基 E 观察时, 以角速度矢量 ω 在基 E 上的投影 (即四元数 ω_E) 来描述运动。

显然, 这种运动对于任何原始固定基 I' 看起来都是一样的。此时不应忘记, 我们所考虑的是基 E 和 E' 相对于 I 和 I' 以同一给定速度 $\omega(t)$ 进行的运动。通解 $\Lambda_E(t)$ 或 $\Lambda_I(t)$ 中的任何一个都相应地满足一种形式的方程 (3.11) 或 (3.12)。此时, 满足这两种形式方程的, 根据定理 3.2, 是唯一解 $N(t)$ 。

我们求以函数 $\Lambda_I(t)$ 和 $\Lambda_E(t)$ 描述的这种运动的运动学方程的第二种形式。我们研究满足方程 (3.12) 的解 $\Lambda_I(t)$:

$$2\dot{\Lambda}_I = \omega_I \circ \Lambda_I.$$

显然, 含有角速度矢量 ω 在基 E' 上的投影, 即量 $\omega_{E'}$ 的方程, 将是描述基 E' 相对于基 I 运动的方程的第二种形式。矢量 ω 在基 E' 上的映象决定于旋转运算

$$\omega_{E'} = \tilde{\Lambda}_I \circ \omega_I \circ \Lambda_I,$$

由此得到运动 $\Lambda_I(t)$ 的方程的第二种形式:

$$2\dot{\Lambda}_I = \Lambda_I \circ \omega_{E'}. \quad (3.66)$$

同理, 就四元数 $\Lambda_E(t)$ 来说, 我们也有两种形式的方程:

$$2\dot{\Lambda}_E = \Lambda_E \circ \omega_E = \omega_{I'} \circ \Lambda_E, \quad (3.67)$$

式中, $\omega_{I'} = \Lambda_E \circ \omega_E \circ \tilde{\Lambda}_E$ 决定于矢量 ω 在基 I' 上的投影。将 (3.63) 和 (3.62) 中的量 Λ_I 和 Λ_E 代入所得到的 $\omega_{I'}$ 和 $\omega_{E'}$ 的关系式, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \omega_{E'} &= \tilde{C}_I \circ \tilde{N} \circ \omega_I \circ N \circ C_I = \tilde{C}_I \circ \omega_E \circ C_I, \\ \omega_{I'} &= C_E \circ N \circ \omega_E \circ \tilde{N} \circ C_E = C_E \circ \omega_I \circ C_E, \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

这符合于不变矢量的已知投影规则。由此可得出定理 3.2 这样的解释。

如果矢量 $\omega(t)$ 在基 I 和 E 上的投影所确定的两组时间函数 $\omega_I(t)$ 和 $\omega_E(t)$ 已知, 那么, 这本身也单值地确定了此两基的初始位置。另一方面, 如果由角速度矢量 $\omega(t)$ 的四元数投影所确定的一种方程形式为已知, 而且基 I 和 E 的初始位置也是已知的, 那么, 这本身也单值地给定了运动学方程的第二种形式。

正象关系式(3.66)、(3.67)一样,关系式(3.68)也是这种关系的例子。由此也可看出,满足运动学方程两种给定(就下述意义来说是给定的,即:函数 $\omega_I(t)$ 和 $\Omega_I(t)$ ——角速度矢量在原始基和固连基上的投影的具体形式是一定的)形式的解 $\Lambda(t)$ 是唯一的,因为这个解的初始条件是单值地确定的。

应该注意到, $\omega_E(t)$ 和 $\omega_I(t)$ 中的一个函数可能是任意地并单值地确定角速度矢量,但是,这两个函数是由正交变换的关系式(3.13)连系起来的,同时又不是任意的,而是由两种形式中的一种运动学方程的解确定的。

这里所进行的研究能够证明又一个涉及到把特解扩大到其它运动情况的定理。根据定理3.1,对于 ω_I 或 ω_E 为具体时间函数的给定方程来说,可根据一个已知特解求出不同的解。然而就是这个特解,在某些情况下能够求出其它函数 $\omega_I(t)$ 或 $\omega_E(t)$ 的解。这些解决定于下述定理。

定理 3.3 假定 $\mathbf{N}(t)$ 是角速度为 $\omega(t)$ 的运动的运动学方程的解。在这种情况下,对于角速度为 $\omega'(t)$ (它是通过正交变换由 $\omega(t)$ 得到的)的运动

$$\omega' = S \circ \omega \circ \tilde{S} \quad (3.69)$$

(式中, S 是常值四元数)来说,存在一个

$$\mathbf{N}' = S \circ \mathbf{N} \circ \tilde{S} \quad (3.70)$$

并满足于方程

$$2\dot{\Lambda}' = \omega'_I \circ \Lambda' = \Lambda' \circ \omega'_E. \quad (3.71)$$

的特解。

在研究通解 $\Lambda_I(t)$ 和 $\Lambda_E(t)$ 的第二种形式的方程[见(3.66)和(3.67)]时,我们看到了这一定理的部分结果。在这种情况下,方程中曾有四元数 $\omega_{E'}$ 和 $\omega_{I'}$ 。而这些角速度的四元数的解,正象那种在基 E 上的映象等于 $\omega_{E'}$ 的其它角速度的解一样,同样是在基 I 上的映象等于 $\omega_{I'}$ 的角速度的解。

我们将对满足于两种给定形成的运动学方程(3.11)、(3.12)的唯一解

$$2\dot{\Lambda} = \omega_I \circ \Lambda = \Lambda \circ \omega_E$$

来证明定理 3.3。

显然, 如果角速度 ω' 是通过变换 (3.69) 由 ω 得到的, 那么, 由同样的关系式便将基 I 和 E 上的映象同 ω_I 和 ω_E 连系起来。实际上, 如果 ω_I 同 ω 相等, 则 ω'_I 也同 ω' 相等, 即

$$\omega'_I = S \circ \omega_I \circ \tilde{S}, \quad \omega'_E = S \circ \omega_E \circ \tilde{S}.$$

将 (3.69) 和 (3.70) 代入方程 (3.71), 得到

$$2\tilde{S} \circ \dot{\mathbf{N}} \circ S = \tilde{S} \circ \omega_I \circ \mathbf{N} \circ S,$$

由此显而易见, \mathbf{N}' 满足于第一种形式的方程。

我们来证明 \mathbf{N}' 也满足于第二种形式的方程。显然, 为此必须有关系式

$$\omega'_E = \tilde{\Lambda}' \circ \omega'_I \circ \Lambda',$$

这可从下列关系式得到:

$$\begin{aligned} \omega'_E &= S \circ \omega_E \circ \tilde{S} = S \circ \tilde{\mathbf{N}} \circ \omega_I \circ \mathbf{N} \circ \tilde{S} \\ &= S \circ \tilde{\mathbf{N}} \circ \tilde{S} \circ \omega'_I \circ S \circ \mathbf{N} \circ \tilde{S} = \tilde{\mathbf{N}}' \circ \omega'_I \circ \mathbf{N}'. \end{aligned}$$

我们看到, $\mathbf{N}'(t)$ 满足的初始条件(基的相互位置)同 $\mathbf{N}(t)$ 满足的条件完全相同。定理的物理意义十分简单: 相对角速度矢量 $\omega(t)$ 可向基 I 和 E 的不同位置转动一个定角。此时, 对应解 (3.70) 相差一常值四元数。

最后, 我们指出运动学方程的另一个重要性质:

已知角速度矢量函数为 $\omega(t)$ 的运动学方程可以化成单位角速度矢量为

$$\frac{\omega(t)}{\omega(t)}$$

的运动学方程。

从运动学方程的齐次性可以看出这种可能性。为此, 在方程 (3.11) 和 (3.12) 中必须置换自变量

$$d\tau = \omega(t) dt, \quad \omega(t) \neq 0 \quad (3.72)$$

而且根据这一点, 还要按关系式

$$\tau = \int_0^t \omega(t) dt = \Phi(t), \quad t = \Phi^{-1}(\tau) \quad (3.73)$$

置換幅角。

將(3.72)和(3.73)代入運動學方程(3.11)和(3.12)，便得到這樣形式的方程：

$$2 \frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{\omega_I [\Phi^{-1}(\tau)]}{\omega [\Phi^{-1}(\tau)]} \circ \Lambda = \Lambda \circ \frac{\omega_E [\Phi^{-1}(\tau)]}{\omega [\Phi^{-1}(\tau)]}. \quad (3.74)$$

在這裡 ω_I/ω 和 ω_E/ω 是單位矢量，因為，在把矢量投影到不同基上時，其長度（范數）不變，即 $|\omega_I| = \omega$ 和 $|\omega_E| = \omega$ 。

以單位角速度矢量的(3.74)這一形式來表示運動學方程，在求解方程時有時可能是方便的。

本節中研究的運動學方程的性質是通性，對於任何運動學參數都是正確的。從 § 3.3 得到的一般算子形式的運動學方程（恒等於方程(3.11)和(3.12)）可直接得出這一結果。因此，對於任何運動學方程都可原封不動地重複使用做出的一切結論。

§ 3.5 特殊形式的運動學方程的解

I. 第一章中討論了表示四元數的不同方法，特別是證明了，任何四元數都可用球面上的弧表示[見(1.11)]。由於在這一表示式中，四元數的單位矢量起着虛數單位的作用，即 $\zeta \circ \zeta = -1$ ，所以，類似於熟知的歐拉公式，對於超復數來說，這樣的四元數表示法●是可以的：

$$\Lambda = \cos \frac{\vartheta}{2} + \zeta \sin \frac{\vartheta}{2} = \exp\left(\zeta \frac{\vartheta}{2}\right). \quad (3.75)$$

顯然，對於共軛四元數來說，滿足關係式

$$\tilde{\Lambda} = \cos \frac{\vartheta}{2} - \zeta \sin \frac{\vartheta}{2} = \exp\left(-\zeta \frac{\vartheta}{2}\right),$$

而 §1.2 中利用這種表示法所考慮的莫弗爾公式，將具有如下形式：

$$\Lambda^n = \cos n \frac{\vartheta}{2} + \zeta \sin n \frac{\vartheta}{2} = \exp\left(\zeta n \frac{\vartheta}{2}\right).$$

但是，用矢量（其長度由轉角決定）的指數函數形式對四元數所作的這種方便的表示法，還沒有象在復數時具有的情況那樣得到）

● 甘凱里的著作^[12]中指出了這種表示的可能性。

泛的应用。问题在于,两四元数之积,在一般情况下不能用这样的指数函数表示,即它的指数是各分量的指数和:

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \exp\left(\zeta_1 \frac{\partial_1}{2}\right) \circ \exp\left(\zeta_2 \frac{\partial_2}{2}\right) \neq \exp\left(\zeta_1 \frac{\partial_1}{2} + \zeta_2 \frac{\partial_2}{2}\right). \quad (3.76)$$

尽管指数的矢量和具有可易性,即

$$\zeta_1 \frac{\partial_1}{2} + \zeta_2 \frac{\partial_2}{2} = \zeta_2 \frac{\partial_2}{2} + \zeta_1 \frac{\partial_1}{2},$$

但是,这就同义地导致了四元数相乘因子互易的可能性,在一般情况下这是不容许的。这个事实就使我们确信前面所述的结论。

我们用三维空间中的运算进行四元数相乘(1.9):

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_2 &= \left(\cos \frac{\partial_1}{2} + \zeta_1 \sin \frac{\partial_1}{2}\right) \circ \left(\cos \frac{\partial_2}{2} + \zeta_2 \sin \frac{\partial_2}{2}\right) \\ &= \cos \frac{\partial_1}{2} \cos \frac{\partial_2}{2} - \zeta_1 \cdot \zeta_2 \sin \frac{\partial_1}{2} \sin \frac{\partial_2}{2} \\ &\quad + \zeta_1 \sin \frac{\partial_1}{2} \cos \frac{\partial_2}{2} + \zeta_2 \sin \frac{\partial_2}{2} \cos \frac{\partial_1}{2} \\ &\quad + \zeta_1 \times \zeta_2 \sin \frac{\partial_1}{2} \sin \frac{\partial_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

可以看出,四元数乘法运算,仅在两种情况下,可转化为指数加法。

a) 矢量 ζ_1 和 ζ_2 共线。正如由(3.77)看到的,当 $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$ 时,我们有

$$\exp\left(\zeta \frac{\partial_1}{2}\right) \circ \exp\left(\zeta \frac{\partial_2}{2}\right) = \exp\left(\zeta \frac{\partial_1 + \partial_2}{2}\right).$$

在几何学上同这种情况对应的是同一大圆的弧的相加。显然,长度同弧的角成比例的共线矢量的相加也和这种加法对应。

b) 角 ∂_1 和 ∂_2 是无限小量。正如从(3.77)看到的,在这种情况下,乘积 $\sin \frac{\partial_1}{2} \sin \frac{\partial_2}{2} \approx \frac{\partial_1 \partial_2}{4}$ 为二阶微量,下列关系式在准确到二阶微量的情况下得以成立:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_2 &\approx 1 + \zeta_1 \frac{\partial_1}{2} + \zeta_2 \frac{\partial_2}{2} = \exp\left(\zeta_1 \frac{\partial_1}{2}\right) \circ \exp\left(\zeta_2 \frac{\partial_2}{2}\right) \\ &= \exp\left(\zeta_2 \frac{\partial_2}{2}\right) \circ \exp\left(\zeta_1 \frac{\partial_1}{2}\right) = \exp\left(\zeta_1 \frac{\partial_1}{2} + \zeta_2 \frac{\partial_2}{2}\right). \end{aligned}$$

前面曾经指出这样一个事实[见(3.8)]: 对于无限小角度来说, 四元数之积给定无限小转动矢量的矢量相加。在几何学上, 这意味着, 球面上的无限小弧以矢量形式相加(因为在小弧的情况下, 球面同切面无甚差异)。

II. 现在我们研究, 以(3.75)表示的四元数的导数等于什么。由于描述刚体运动的四元数是变量, 则量 ζ 和 ϑ 也将是时间函数。根据导数的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}\zeta(t + \Delta t)\vartheta(t + \Delta t)\right] - \exp\left[\frac{1}{2}\zeta(t)\vartheta(t)\right]}{\Delta t}.\end{aligned}$$

第一个指数函数的幂指数展成级数:

$$\begin{aligned}\zeta(t + \Delta t)\vartheta(t + \Delta t) &= \zeta(t)\vartheta(t) + \dot{\zeta}(t)\vartheta(t)\Delta t + \zeta(t)\dot{\vartheta}(t)\Delta t + O(\Delta t).\end{aligned}$$

但是, 正如上面已经证明了的, 在一般情况下, 不能用指数函数之积表示和的指数函数。显然, 只有在矢量 ζ 是常数时, 这种情况才是可能的。可以看出, 此时

$$\begin{aligned}\exp\left[\frac{1}{2}\zeta\vartheta(t + \Delta t)\right] &= \exp\left\{\frac{1}{2}\zeta[\vartheta(t) + \dot{\vartheta}\Delta t + O(\Delta t)]\right\} \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}\zeta\vartheta(t)\right] \circ \exp\left\{\frac{1}{2}\zeta[\dot{\vartheta}\Delta t + O(\Delta t)]\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\zeta[\dot{\vartheta}\Delta t + O(\Delta t)]\right\} \circ \exp\left[\frac{1}{2}\zeta\vartheta(t)\right].\end{aligned}$$

这种四元数的导数将等于

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}\zeta\vartheta(t)\right] \circ \left\{\exp\frac{1}{2}\zeta[\dot{\vartheta}\Delta t + O(\Delta t)] - 1\right\}}{\Delta t} \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}\zeta\vartheta(t)\right] \circ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}\zeta[\dot{\vartheta}\Delta t + O(\Delta t)]\right\} - 1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}\zeta[\dot{\vartheta}\Delta t + O(\Delta t)]\right\} - 1}{\Delta t} \circ \exp\left[\frac{1}{2}\zeta\vartheta(t)\right].\end{aligned}$$

可以确信:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}\zeta[\dot{\vartheta}\Delta t0(\Delta t)]\right\}-1}{\Delta t} = \frac{1}{2}\zeta\dot{\vartheta}$$

[例如, 以正弦和余弦的展开式 (3.75) 来表示指数函数]。考虑到这一点, 最后得到

$$\dot{\Lambda} = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta\dot{\vartheta}\right) \circ \frac{1}{2}\zeta\dot{\vartheta} = \frac{1}{2}\zeta\dot{\vartheta} \circ \exp\left(\frac{1}{2}\zeta\dot{\vartheta}\right). \quad (3.78)$$

这一关系式证明, 有限转动矢量 $\theta = 2\zeta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ 具有不变的方向时, 四元数的导数可用指数函数 (3.75) 中指数的导数同四元数之积表示:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \zeta\dot{\vartheta} = \frac{1}{2}\zeta\dot{\vartheta} \circ \Lambda.$$

在这里因子互易是可以的, 因为四元数 ζ 和 Λ 具有共线矢量部分。

将关系式 (3.78) 同运动学方程 (3.11) 和 (3.12) 加以比较, 可以看出:

$$\mathbf{N}(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta\dot{\vartheta}\right) \quad (3.79)$$

是运动学方程的解。这时, 角速度具有不变的方向, 而且

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \zeta\boldsymbol{\omega}(t) = \zeta\dot{\vartheta}(t). \quad (3.80)$$

特解 (3.79) 应该确定给定的运动情况的运动学方程的所有各解。如果通过角速度矢量在基 \mathbf{I} 上的投影给出这一矢量, 从而也就给出四元数

$$\boldsymbol{\omega}_I = \zeta_I\dot{\vartheta},$$

因为投影时变化的只有单位矢量的方向余弦, 而不是它的长度。根据定理 3.1, 公式 (3.79) 以下列形式确定方程 (3.12) 的通解:

$$\Lambda_I(t) \exp\left\{\left[\frac{1}{2}\zeta_I\dot{\vartheta}(t)\right] \circ \mathbf{C}_I\right\}. \quad (3.81)$$

同理, 如果通过矢量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 在固连基 \mathbf{E} 上的投影给定这一矢量, 则如下形式得到运动学方程 (3.11) 的通解:

$$\Lambda_E(t) = \mathbf{C}_E \circ \exp\left[\frac{1}{2}\zeta_E\dot{\vartheta}(t)\right]. \quad (3.82)$$

现在, 假定运动学方程描述基 E 以给定角速度 (3.80) 相对于基 I 的运动, 同时, 基 E 的初始位置决定于四元数 C_I 。既然, 转角 $\vartheta(t)$, 根据 (3.80) 等于 [也见 (3.60)]:

$$\vartheta(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega}(t') \cdot \boldsymbol{\zeta} dt' = \int_0^t \omega(t') dt', \quad (3.83)$$

所以在初始时刻 $\vartheta(0) = 0$ 。

我们求对于这种运动情况的解 (3.82) 和 (3.81) 具有什么样的形式。显然, 应该满足等式

$$\Lambda_E(t) = \Lambda_I(t)。$$

在初始时刻, 我们有

$$\Lambda_E(0) = C_E = \Lambda_I(0) = C_I,$$

由此, 解 (3.82) 应具有这种形式:

$$\Lambda_E = C_I \circ \exp\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}_I \vartheta\right)。$$

由此可见, 仅当关系式

$$\begin{aligned} \Lambda_I &= \exp\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}_I \vartheta \circ C_I\right) = C_I \circ \left(\tilde{C}_I \circ \exp\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}_I \vartheta\right] \circ C_I\right) \\ &= C_I \circ \exp\left[\frac{1}{2} (\tilde{C}_I \circ \boldsymbol{\zeta}_I \circ C_I)\right] \vartheta \end{aligned}$$

得到满足时, 就是说, 恰恰象

$$\boldsymbol{\omega}_E = \tilde{C}_I \circ \boldsymbol{\omega}_I \circ C_I$$

一样, 当

$$\boldsymbol{\zeta}_E = \tilde{C}_I \circ \boldsymbol{\zeta}_I \circ C_I$$

得到满足时, Λ_I 才将等于 Λ_E , 即 $\boldsymbol{\omega}_I$ 和 $\boldsymbol{\omega}_E$ 以及两种形式的运动学方程都仅仅决定于初始条件。

当 $C_I = 1$ 时, 所研究的解变为特解 $\mathbf{N}(t)$ (3.79)。如果四元数 C_I 指向矢量 $\boldsymbol{\zeta}$, 就是说, 有表示式

$$C_I = \exp\left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}_I \vartheta_0\right),$$

则 (3.81) 形式的解便为:

$$\Lambda_I = \exp\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}_I (\vartheta + \vartheta_0)\right],$$

这个解满足相位平移那种类型的初始条件。所考虑的这个例子很好地说明了前节定理的内容。

我们再指出一个在角速度矢量具有不变方向的情况下, 可能的特解表示式:

$$\mathbf{N}(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t \boldsymbol{\omega}(t') dt'\right), \quad (3.84)$$

顾及到(3.83), 从(3.79)便得到这一公式。实际上所得到的解表示在固定平面上简单的旋转运动。

III. 根据定理 3.3, 依已知角速度矢量的运动学方程的已知解可以得出任何其它运动情况的解, 而此种运动的角速度是由给定的常值变换得到的。我们试将这种方法用于任意角速度的情况。

显然, 角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 可表成下式:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{S}(t) \circ \boldsymbol{\zeta} \omega(t) \circ \tilde{\mathbf{S}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \mathbf{S} \circ \boldsymbol{\zeta} \circ \tilde{\mathbf{S}},$$

即单位矢量变换的形式, 矢量的位置决定于四元数 $\mathbf{S}(t)$ 和时间函数 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 。上面确定了角速度矢量 $\boldsymbol{\zeta} \omega(t)$ 方向不变时的解, 我们用 $\mathbf{N}(t)$ 表示它。现在我们求, 怎样区别以角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 运动时运动学方程的解 $\mathbf{A}(t)$ 和量 $\mathbf{N}' = \mathbf{S} \circ \mathbf{N} \circ \tilde{\mathbf{S}}$ 。我们将研究在原始基 \mathbf{I} 上的投影方程。(3.12)将是初始方程。我们寻求四元数 \mathbf{N}' 满足什么样的方程。

求微分, 便得到

$$\dot{\mathbf{N}}' = \dot{\mathbf{S}} \circ \mathbf{N} \circ \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{S} \circ \dot{\mathbf{N}} \circ \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{S} \circ \mathbf{N} \circ \tilde{\mathbf{S}} \circ \dot{\mathbf{S}} \circ \tilde{\mathbf{S}}.$$

假定, 四元数 \mathbf{S} 满足这样的方程:

$$2\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\Omega}_I \circ \mathbf{S}.$$

将导数的表达式代入 \mathbf{N}' 的方程, 并且考虑到四元数 \mathbf{N} 决定于方程

$$2\dot{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\zeta}_I \omega(t) \circ \mathbf{N},$$

便得到

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{N}}' &= 2(\dot{\mathbf{S}} \circ \tilde{\mathbf{S}}) \circ \mathbf{S} \circ \mathbf{N} \circ \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{S} \circ \boldsymbol{\zeta}_I \omega(t) \circ \mathbf{N} \circ \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{S} \circ \mathbf{N} \circ \tilde{\mathbf{S}} \circ (2\dot{\mathbf{S}} \circ \tilde{\mathbf{S}}) \\ &= (\boldsymbol{\Omega}_I \circ \mathbf{N}' - \mathbf{N}' \circ \boldsymbol{\Omega}_I) + \boldsymbol{\omega}_I(t) \circ \mathbf{N}'. \end{aligned} \quad (3.85)$$

● 原书此处括号内误为 $2\dot{\mathbf{S}} \circ \mathbf{S}$ 。——校者

由此可见,在准确到 $\Omega_I \circ \mathbf{N}' - \mathbf{N}' \circ \Omega_I$ 项的条件下, \mathbf{N}' 与 $\Lambda(t)$ 满足于同一个方程。用所述方法,根据已知解 \mathbf{N} 任何时候都可得到解 \mathbf{N}' 。 $\Omega_I \circ \mathbf{N}' = \mathbf{N}' \circ \Omega_I$ 的情况可归结为 $\Omega_I = 0$, 即 $\mathbf{S} = \text{const}$, 这是定理 3.3 中讨论过的,或者归结为 Ω_I 和 $\text{vect } \mathbf{N}'$ 平行这样的要求。

IV. 关系式 (3.85) 表明,在某些运动的情况下,运动学方程的解可以四元数之积的形式得到,其中每个四元数都满足于比较简单的运动学方程。我们比较详细地研究一下这个问题。

假定运动学方程 (3.11) 或 (3.12) 已知。我们将以两四元数之积

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

的形式求它的解,使这个未知变换的表达式对应于以两次依次进行的变换(例如,由基 \mathbf{I} 转换为基 \mathbf{I}' , 之后转换为基 \mathbf{E})。微分 Λ , 我们求出

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \dot{\Lambda}_1 \circ \Lambda_2 + \Lambda_1 \circ \dot{\Lambda}_2 = \frac{1}{2} \omega_{1I} \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2 + \frac{1}{2} \Lambda_1 \circ \omega_{2I'} \circ \Lambda_2 \\ &= \frac{1}{2} (\omega_{1I} + \Lambda_1 \circ \omega_{2I'} \circ \Lambda_1) \circ \Lambda_0. \end{aligned}$$

问题在于选择一种将给定角速度

$$\omega_I(t) = \omega_{1I} + \Lambda_1 \circ \omega_{2I'} \circ \Lambda_1 = \omega_{1I} + \omega_{2I} \quad (3.86)$$

分为分量 ω_{1I} 和 $\omega_{2I'} = \tilde{\Lambda}_1 \circ \omega_{2I'} \circ \Lambda_1$ 的分解,使之对其每一分量来说,解都是已知的。特别是,如果 ω_{1I} 和 $\omega_{2I'}$ 具有不变的方向,则可以 (3.84) 的形式得到解 $\Lambda_1(t)$ 和 $\Lambda_2(t)$ 。此时我们看到,虽然 ω_{1I} 和 $\omega_{2I'}$ 将具有不变的方向,但合成速度 $\omega_I(t)$ (3.86) 却将是大小和方向可变的矢量。

这里探讨的方法有可能得到锥形进动时的运动学方程的解。假定:角速度矢量绕某一轴如 \mathbf{i}_3 , 沿锥面旋转,于是有等式

$$\omega_I = a \mathbf{i}_1 \cos bt + a \mathbf{i}_2 \sin bt + c \mathbf{i}_3, \quad (3.87)$$

式中, a 、 b 、 c 是任意常数。

根据定理 3.3, 只要求出对于矢量 $\omega(t)$ 进动锥这个具体位置的解就可以了。进动锥在基 \mathbf{I} 的所有其它位置, 都可通过简单的

转动由所述位置求出。我们用展开式(3.86)的形式来表示这个角速度矢量,而且选取 $\mathbf{b} = b\mathbf{i}_3$ 作为 $\boldsymbol{\omega}_{1I}$ 。在这种情况下,由于 $b\mathbf{i}_3$ 决定四元数 Λ_1 的变化,所以我们有

$$2\dot{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\omega}_{1I} \circ \Lambda = b\mathbf{i}_3 \circ \Lambda,$$

而根据(3.84), Λ_1 可用这种形式表示:

$$\Lambda_1(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t b\mathbf{i}_3 dt'\right) = \exp\left(\frac{1}{2} b\mathbf{i}_3 t\right) = \exp\left(\frac{1}{2} bt\right).$$

下面假定

$$\boldsymbol{\omega}_{2I'} = a\mathbf{i}_1 + (c-b)\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\omega}_{I0} - \mathbf{b},$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_{I0} = \boldsymbol{\omega}_I(0)$ (在初始时刻)。这时,通过四元数 $\Lambda_1(t)$ 进行的旋转运算,由 $\boldsymbol{\omega}_{2I'}$ 得出 $\boldsymbol{\omega}_{2I}$,就是说,我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{2I} &= \Lambda_1 \circ \boldsymbol{\omega}_{2I'} \circ \Lambda_1 = \exp\left(\frac{1}{2} b\mathbf{i}_3 t\right) \circ [a\mathbf{i}_1 + (c-b)\mathbf{i}_3] \circ \exp\left(-\frac{1}{2} b\mathbf{i}_3 t\right) \\ &= a\mathbf{i}_1 \cos bt + b\mathbf{i}_2 \sin bt + (c-d)\mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

由此可见,在这样选择 $\boldsymbol{\omega}_{2I'}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{1I}$ 的情况下,实际上得到(3.86)这种形式的速度 $\boldsymbol{\omega}_{1I} + \boldsymbol{\omega}_{2I}$, 它等于 $\boldsymbol{\omega}_I$ (3.87)。

满足方程

$$2\dot{\Lambda}_2 = \boldsymbol{\omega}_{2I'} \circ \Lambda_2 = [a\mathbf{i}_1 + (c-b)\mathbf{i}_3] \circ \Lambda_2 = (\boldsymbol{\omega}_{I0} - \mathbf{b}) \circ \Lambda_2$$

的四元数 Λ_2 的解是以(3.84)的形式得到的,因为相应的角速度矢量具有不变方向:

$$\Lambda_2 = \exp\left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{I0} - \mathbf{b}) t\right].$$

最后,我们得到对于角速度(3.87)的运动学方程的如下特解:

$$\Lambda_I = \exp\left(\frac{1}{2} bt\right) \circ \exp\left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_{I0} - \mathbf{b}) t\right]. \quad (3.88)$$

用类似的方法也可求出其它形式的运动学方程的解,这种方程具有(3.87)型的角速度。微分(3.88),可直接证实, $\Lambda_I(t)$ 满足运动学方程(3.12)。

V. 正如 § 2.7 中已经证明了的,任何四元数都可用具有给定方向的三个四元数之积表示。我们研究用三个解的积表示运动学方程的解的可能性,其中每个解都可用某种方法,例如以(3.84)

的形式求出。我们将研究型为(3.12)的运动学方程(为简明起见,在四元数和角速度的下面注以基的标号)。

假定变换四元数以积的形式表示:

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3, \quad (3.89)$$

式中, Λ_1 、 Λ_2 、 Λ_3 给出三次顺序的变换, 变换之和等价于给定的变换。我们假定每个四元数满足方程

$$2\dot{\Lambda}_i = \omega_i \circ \Lambda_i \quad (i=1, 2, 3)。 \quad (3.90)$$

微分关系式(3.89), 使得

$$\begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= 2(\dot{\Lambda}_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 + \Lambda_1 \circ \dot{\Lambda}_2 \circ \Lambda_3 + \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dot{\Lambda}_3) \\ &= (\omega_1 + \Lambda_1 \circ \omega_2 \circ \tilde{\Lambda}_1 + \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \omega_3 \circ \tilde{\Lambda}_2 \circ \tilde{\Lambda}_1) \circ \Lambda_0. \end{aligned}$$

从所得表达式可以看出, 当等式

$$\omega(t) = \omega_1 + \Lambda_1 \circ \omega_2 \circ \tilde{\Lambda}_1 + \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \omega_3 \circ \tilde{\Lambda}_2 \circ \tilde{\Lambda}_1 \quad (3.91)$$

成立时, 也只有这时, (3.89)的 $\Lambda(t)$ 将满足原始方程(3.12)。我们研究构成四元数 Λ_i 为平面旋转, 即矢量 $\omega_i(t)$ 具有不变的方向的情况。我们取下列角速度作为例子:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \mathbf{i}_3, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \mathbf{i}_2, \quad \omega_3 = \dot{\vartheta} \mathbf{i}_1. \quad (3.92)$$

在这种情况下, 下述四元数将是方程(3.90)的特解:

$$\Lambda_1 = \exp\left(\frac{1}{2} \varphi \mathbf{i}_3\right), \quad \Lambda_2 = \exp\left(\frac{1}{2} \psi \mathbf{i}_2\right), \quad \Lambda_3 = \exp\left(\frac{1}{2} \vartheta \mathbf{i}_1\right). \quad (3.93)$$

现在我们提出一个问题: 为使等式(3.91)对于任何 $\omega(t)$ 都能满足, 可否对 $\varphi(t)$ 、 $\psi(t)$ 和 $\vartheta(t)$ 加以选择? 于(3.91)中代入四元数(3.93)和角速度(3.92)的表达式并进行四元数的乘法运算, 便得到

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \Omega_1 \mathbf{i}_1 + \Omega_2 \mathbf{i}_2 + \Omega_3 \mathbf{i}_3 \\ &= \dot{\varphi} \mathbf{i}_3 + \dot{\psi} (\mathbf{i}_2 \cos \varphi - \mathbf{i}_1 \sin \varphi) + \dot{\vartheta} (\mathbf{i}_2 \sin \varphi \cos \psi - \mathbf{i}_3 \sin \psi \\ &\quad - \mathbf{i}_1 \cos \varphi \cos \psi). \end{aligned}$$

使单位矢的系数相等, 便求出决定角 φ 、 ψ 和 ϑ 的下列方程组:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\vartheta} \cos \varphi \cos \psi - \dot{\psi} \sin \varphi, \\ \Omega_2 &= \dot{\vartheta} \sin \varphi \cos \psi + \dot{\psi} \cos \varphi, \\ \Omega_3 &= \dot{\varphi} - \dot{\vartheta} \sin \psi. \end{aligned}$$

这个方程组不是别的，而是克雷洛夫角的运动学方程组 (3.42)。这是可以预料的事，因为旋转 (3.92) 的选择具有克雷洛夫角的转动顺序。正是这样，通过另一种 (3.92) 顺序的选择，可将运动学方程的解化为欧拉方程；用类似的方法还可确立第二种运动学方程的解。

应当指出，研究陀螺系统复杂支架运动的运动学时，所探讨的 (3.89) 型平面旋转顺序的表示式是有用的。另一方面，正象刚才所做的一样，以 (3.89) 的形式表示运动学方程的解，有可能将运动展成比较复杂的已知运动之和，而不仅仅展成旋转方向不变的运动之和。

§ 3.6 运动学方程的形式解

为了得到运动学方程的形式解，我们再研究一个无限小变换四元数可能的表示式。本章第一节已经介绍了将这个四元数同角速度矢量联系起来的关系式 (3.1) 和 (3.4)。利用四元数表示式 (3.75) 还可以得到这样的关系式：

$$\Delta\Lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(t+\xi\Delta t)\Delta t\right),$$

$$0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.94)$$

在这一关系式中假定，在时间区间 $[t, t+\Delta t]$ 内，角速度的值为常数且等于其在区间中某一点的值。比较 (3.94) 和解 (3.84)，可以看出，当假定在区间 $[t, t+\Delta t]$ 内角速度值不变时， $\Delta\Lambda$ 的值是以运动学方程的解的形式得到的。只有取其极限，使 Δt 趋向于零时，我们才能得到四元数增量的精确值：

$$d\Lambda(t) = \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(t)dt\right]. \quad (3.95)$$

我们探讨第一种形式的运动学方程 (3.11) 并回到它的 (3.9) 式那种写法上来。我们将解的整个时间区间 $[0, T]$ 分成 N 个间隔 Δt_i ，其中

$$\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i, \quad \max |\Delta t_i| \leq \frac{kT}{N} \quad (i=1, 2, \dots, N),$$

式中, N 是有界数。根据关系式(3.9), 在时间 t_{i+1} 的四元数, 将通过无限小变换四元数(3.94), 依其在 t_i 时刻的数值确定:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(t_{i+1}) &= \Lambda(t_i) \circ \Delta \Lambda(t_i) \\ &= \Lambda(t_i) \circ \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t_i + \xi_{i+1} \Delta t_{i+1}) \Delta t_{i+1} \right], \\ 0 &\leq \xi \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

在这里, 因为每个四元数都是变换的特征四元数, 所以 ω 在固连基上的映象是角速度矢量。由关系式(3.96)看出, 如果运动在 $t=0$ 时刻从四元数 Λ_0 开始, 则四元数 $\Lambda(t_{i+1})$ 的值可近似地表成如下形式:

$$\begin{aligned} \Lambda(t_{i+1}) &= \Lambda_0 \circ \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(\xi_1 \Delta t_1) \Delta t_1 \right] \circ \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t_1 + \xi_2 \Delta t_2) \Delta t_2 \right] \circ \cdots \\ &\cdots \circ \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t_i + \xi_{i+1} \Delta t_{i+1}) \Delta t_{i+1} \right]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

关系式(3.97)可由图 3.5 说明, 该图中以球面弧表示四元数。现在, 我们减小每一间隔的长度, 将间隔的数目增加到无限大, 于是, 每一时间间隔的方程的解(3.94)都将趋向于精确值(3.95)。此时可以预料, 表达式(3.97)将趋向于运动学方程(3.11)的精确解。

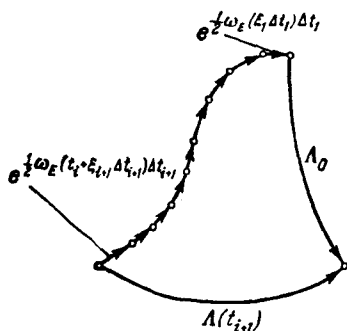


图 3.5

类似于用部分和的极限这种形式得到的黎曼积分, 我们研究以正方向和反方向取的乘积(3.97)的极限值:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \prod_{i=0}^N \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t_i + \xi_{i+1} \Delta t_{i+1}) \Delta t_{i+1} \right]$$

和

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \prod_{i=N}^0 \exp \left[\frac{1}{2} \omega_I(t_i + \xi_{i+1} \Delta t_{i+1}) \Delta t_{i+1} \right]. \quad (3.98)$$

这些值以下列符号表示:

$$\sum_0^T \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t) dt \right] \quad \text{和} \quad \sum_T^0 \exp \left[\frac{1}{2} \omega_I(t) dt \right]. \quad (3.99)$$

如果极限存在, 则它以下列形式决定运动学方程(3.11)的通解:

$$\Lambda_E(T) = \Lambda_0 \circ \sum_0^T \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t) dt \right]. \quad (3.100)$$

对第二种运动学方程(3.12), 用类似的方法重复以上全部推导, 根据(3.99), 便以下列形式得到满足初始条件 Λ_0 的通解:

$$\Lambda_I(T) = \sum_T^0 \exp \left(\frac{1}{2} \omega_E dt \circ \Lambda_0 \right). \quad (3.101)$$

我们证明, 函数(3.100)和(3.101)实际上是方程(3.11)和(3.12)的解。我们将四元数的导数看作是下述极限:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_E &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda_E(t + \Delta t) - \Lambda_E(t)}{\Delta t} \\ &= \Lambda_0 \circ \sum_0^t \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t) dt \right] \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_t^{t+\Delta t} \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t') dt' \right] - 1}{\Delta t}. \end{aligned}$$

由 $\sum \exp \left(\frac{1}{2} \omega_E dt \right)$ 定义为(3.98)式的极限这一点出发, 可以证明:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_t^{t+\Delta t} \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t') dt' \right] - 1}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega_E(t).$$

为了求出这一极限, 我们考虑到这样一个事实, 即

$$\sum_t^{t+\Delta t} \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t') dt' \right]$$

可简化为

$$\exp \left[\frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \omega_E(t') dt' \right],$$

这可由交换(3.98)极限得出,在(3.98)中,对于微量 Δt 来说,指数函数乘积[根据 § 3.5 的说明 b)]可用具有指数和的指数函数代换。函数值

$$\left(\exp \left[\frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \omega_E(t') dt' \right] - 1 \right) / \Delta t$$

的极限可用一般方法求出:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp \left[\frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \omega_E(t') dt' \right] - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t + \xi \Delta t) \Delta t \right] - 1}{\Delta t} = \omega_E(t).$$

由此可见, (3.100) 是方程(3.11)的解。

在求导数 $\dot{\Lambda}_I(t)$ 时, 应该考虑到,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Lambda_I(t + \Delta t) - \Lambda_I(t)}{\Delta t} = \lim_{t+\Delta t} \frac{\sum_{t+\Delta t}^t \exp \left[\frac{1}{2} \omega_I(t') dt' \right] - 1}{\Delta t} \circ \Lambda_I(t)$$

而且根据前述类似地有:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_{t+\Delta t}^t \exp \left[\frac{1}{2} \omega_I(t') dt' \right] - 1}{\Delta t} = \frac{1}{2} \omega_I(t),$$

就是说, (3.101) 是方程(3.12)的解。

最后我们注意到, 在无穷积(3.97)中, 正象在极限(3.99)中一样, 在一般情况下, 不会出现指数函数的指数相加(即积分)。在角速度矢量具有不变的方向的特殊情况下, 指数求和才是可能的。显然, 只有在这种情况下, (3.99)才有可能得到下述表达式:

$$\begin{aligned} \sum_0^t \exp \left[\frac{1}{2} \omega_E(t') dt' \right] &= \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^t \omega_E(t') dt' \right], \\ \sum_t^0 \exp \left[\frac{1}{2} \omega_I(t') dt' \right] &= \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^t \omega_I(t') dt' \right], \end{aligned}$$

而此时不难看出, 解(3.100)和(3.101)已经变成了前面求出的解(3.84)。

第四章 运动学方程的近似积分和数值积分

运动学方程的精确解,在一般情况下,不能用初等函数表示。因此,在实际应用中,只好使用近似法、模拟计算机模拟和数值积分。在捷联式控制系统中,运动学方程的数值积分具有特殊意义。

本章中介绍了固连基中运动方程,即方程(3.11)的数值积分法的建立和对它的分析。对于方程(3.12)也可用类似的方法进行。

§ 4.1 数值法的建立

前一章中已经证明,方程(3.11)的通解可用具有单位初始条件的特解表示。而这一结果可用略微不同的形式表示出来。积分(3.11),我们有

$$\Lambda(t) = \Lambda(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \Lambda(t') \circ \omega_E(t') dt'. \quad (4.1)$$

假定

$$\Lambda(t) = \Lambda(t_0) \circ \mathbf{N}(t). \quad (4.2)$$

将关系式(4.2)代入等式(4.1),我们得到

$$\mathbf{N}(t) = 1 + \frac{1}{2} \int \mathbf{N}(t') \circ \omega_E(t') dt'. \quad (4.3)$$

因此, $\mathbf{N}(t)$ 满足初始条件为

$$\mathbf{N}(t_0) = 1$$

的方程(3.11)。

为了建立数值积分的算式,假定在关系式(4.2)中

$$t_0 = t_{n-1}, \quad t = t_n = t_{n-1} + h,$$

式中, h 是具有积分步长涵义的某一区间。我们有

$$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \mathbf{N}_n. \quad (4.4)$$

在该式中

$$\Lambda_n = \Lambda(t_n), \quad \mathbf{N}_n = \mathbf{N}(t_n).$$

方程(4.3)的精确解可用毕卡法逼近,此解是与矩阵形式类似的四元数:

$$\mathbf{N}(t) = 1 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \boldsymbol{\omega}_E(t') dt' + \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^{t'} \boldsymbol{\omega}_E(t'') dt'' \right] \circ \boldsymbol{\omega}_E(t') dt' + \dots \quad (4.5)$$

根据公式(4.5)可以建立不同阶的数值法。应该指出,在建立数值法时,一般说来,不能认为,在任意时刻都能测得值 $\boldsymbol{\omega}_E(t)$ 。特别是,在捷联式系统中运动方程积分时,原始信息通常以积分步长内角速度积分的形式输入。根据这一点,我们引入一个视在转动矢量

$$\boldsymbol{\Theta}^* = \int_0^t \boldsymbol{\omega}_E(t') dt'. \quad (4.6)$$

这时,在第 n 步的原始信息是这个矢量的一次“向后”差分:

$$\nabla \boldsymbol{\Theta}_n^* = \boldsymbol{\Theta}^*(t_n) - \boldsymbol{\Theta}^*(t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \boldsymbol{\omega}_E(t') dt'. \quad (4.7)$$

在每个步长内,我们用四阶内插多项式求 $\boldsymbol{\Theta}^*(t)$ 的近似值。此时,为不失一般性,可以认为,在步长的起点

$$\boldsymbol{\Theta}^*(t_{n-1}) = 0.$$

我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}^*(\tau) \approx & \left(\nabla \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{2} \nabla^2 \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{6} \nabla^3 \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{12} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \right) \tau \\ & + \left(\frac{1}{2} \nabla^2 \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{24} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \right) \tau^2 + \left(\frac{1}{6} \nabla^3 \boldsymbol{\Theta}_n^* + \frac{1}{12} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \right) \tau^3 \\ & + \frac{1}{24} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \tau^4, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\Theta}^*(\tau)}{d\tau} \approx & \left(\nabla \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{2} \nabla^2 \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{6} \nabla^3 \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{12} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \right) \\ & + \left(\nabla^2 \boldsymbol{\Theta}_n^* - \frac{1}{12} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \right) \tau + \left(\frac{1}{2} \nabla^3 \boldsymbol{\Theta}_n^* + \frac{1}{4} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \right) \tau^2 + \frac{1}{6} \nabla^4 \boldsymbol{\Theta}_n^* \tau^3, \end{aligned} \quad (4.9)$$

● (4.5)式中中方括号内的积分限原书误为 $\int_{t_0}^t$ 。——校者

● 原书误为 $\frac{1}{24}$ 。——校者

式中, τ 是步长内的无因次时间, 而

$$\tau = \frac{t - t_{n-1}}{h}。$$

将用关系式(4.6)、(4.8)、(4.9)引入的视在转动矢量之值代入式(4.5)并保留到四阶微量的项, 我们便得到 t_n 时刻解的下列表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_n = & 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_n^*|^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \\ & - \frac{1}{48} |\nabla \Theta_n^*|^2 \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) \\ & - \frac{1}{192} |\nabla \Theta_n^*|^2 \nabla^2 \Theta_n^* + \frac{1}{384} |\nabla \Theta_n^*|^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

在这里, 为了得到该公式, 使用了以矢量乘法运算表示四元数乘法运算的公式(1.9)。

在关系式(4.10)中保留相应阶数微量的项, 我们就可得到数值法的算式:

$$\mathbf{N}_n^* = 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{N}_n^* = 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_n^*|^2, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_n^* = & 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_n^*|^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \\ & - \frac{1}{48} |\nabla \Theta_n^*|^2 \nabla \Theta_n^*. \end{aligned} \quad (4.13)$$

此时, 在给定的步长内算出的四元数 Λ 之值由表达式

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \mathbf{N}_n^*$$

确定。在这个关系式中, 象在(4.11)~(4.13)中一样, 用星号表示近似式算出的数值。

在文献[22, 38]中, 方法(4.11)和(4.12)分别称为普通欧拉法和改进欧拉法。式(4.13)确定了三阶法。表达式(4.10)本身, 当然, 可以看成是四阶法。

对于真实转动矢量来说, 可以直接建立第二组数值法。

假定

$$\Lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta\vartheta\right).$$

我们引入一个真实转动矢量●

$$\Theta = \zeta\vartheta.$$

微分该等式并用方程(3.61)消去 $\dot{\zeta}$,我们就可得到矢量 Θ 的运动学方程

$$\dot{\Theta} = \omega_E \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} + \Theta(\omega_E \cdot \Theta) \frac{1 - \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}}{\vartheta^2} + \frac{1}{2}(\Theta \times \omega_E). \quad (4.14)$$

表达式 $\frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}$ 和 $\left(1 - \frac{\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}\right)\vartheta^{-2}$ 是 ϑ 的解析函数。因此,为解方程(4.14)可利用小参数法^[4, 34],而把 Θ 和 $\int \omega_E dt$ 看作是一阶微量。我们将把解表成这种形式:

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta^{(k)}. \quad (4.15)$$

将(4.15)代入原来的方程(4.14)并使同阶微量项相等,则得到 $\Theta^{(k)}$ 的方程:

$$\dot{\Theta}^{(1)} = \omega_E,$$

$$\dot{\Theta}^{(2)} = \frac{1}{2} \Theta^{(1)} \times \omega_E,$$

$$\dot{\Theta}^{(3)} = -\frac{1}{12} \omega_E |\Theta^{(1)}|^2 + \frac{1}{12} \Theta^{(1)} [\omega_E \cdot \Theta^{(1)}] + \frac{1}{2} [\Theta^{(2)} \times \omega_E],$$

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^{(4)} = & -\frac{1}{8} \omega_E [\Theta^{(1)} \cdot \Theta^{(2)}] + \frac{1}{12} \Theta^{(1)} \{ \Theta^{(1)} [\omega_E \cdot \Theta^{(2)}] \\ & + \Theta^{(2)} [\omega_E \cdot \Theta^{(1)}] \} + \frac{1}{12} [\Theta^{(3)} \times \omega_E]. \end{aligned}$$

必须再对所得关系式进行积分。利用(4.6)~(4.9),在 $\Theta(t_{n-1})=0$ (准确到四阶微量项)的条件下,在 t_n 时刻我们得到

● 例如,在著作[14]中就引入了这种矢量,而在那里称作有限转动矢量。我们将称它为真实转动矢量,以区别于 ϑ [见(2.52)]。

$$\Theta_n^{(1)} = \nabla \Theta_n^*,$$

$$\Theta_n^{(2)} = \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*),$$

$$\Theta_n^{(3)} = 0.$$

最后我们得到

$$\Theta_n = \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) + \dots \quad (4.16)$$

在(4.16)中仅仅保留第一项,我们就可得到数值法,这种方法可称为平均速度法:

$$\mathbf{N}_n^* = \exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right). \quad (4.17)$$

同理,得到三阶和四阶法:

$$\mathbf{N}_n^* = \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right\}\right), \quad (4.18)$$

$$\mathbf{N}_n^* = \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) \right\}\right) \quad (4.19)$$

我们注意到,所得各式中的高次差分可用前一步长中的一次差分表示。特别是,表达式(4.13)、(4.18)、(4.19),可分别变成下列形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_n^* &= 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_n^*|^2 \\ &\quad - \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla \Theta_{n-1}^*) - \frac{1}{48} |\nabla \Theta_n^*|^2 \nabla \Theta_n^*, \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_n^* = \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla \Theta_{n-1}^*) \right\}\right),$$

$$\mathbf{N}_n^* = \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla \Theta_{n-1}^*) + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla \Theta_{n-2}^*) \right\}\right).$$

第三组数值法是以利用斯梯尔吉斯数值积分的差分格式^[25]为基础的。顾及到(4.6),方程(3.11)可表成赛诺恩方程的形式:

$$d\Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \circ d\Theta^*. \quad (4.20)$$

可以证明,对于方程(4.20),相应的斯梯尔吉斯数值积分公式

● 原书误为 $\frac{1}{6}$ 。——校者

具有下列形式●;

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1}^* \circ \nabla \Theta_n^*, \quad (4.21)$$

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1}^* \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n^* \circ \nabla \Theta_n^*, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1}^* \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n^* \circ \nabla \Theta_n^* \\ + \frac{1}{24} \{ \nabla \Lambda_n^* \circ \nabla^2 \Theta_n^* - \nabla^2 \Lambda_n^* \circ \nabla \Theta_n^* \} \end{aligned} \quad (4.23)$$

这些式子分别对应于矩形、梯形和二次抛物线的插值公式,我们注意到,在按给定步长计算之初,这些式子中的 $\nabla \Lambda_n^*$ 和 $\nabla^2 \Lambda_n^*$ 是未知量,它们应该从前一步长中的差分外推而得。(4.22)的外推公式具有下列形式:

$$\nabla \Lambda_n^* \approx \nabla \Lambda_{n-1}^* + \nabla^2 \Lambda_{n-1}^* + \nabla^3 \Lambda_{n-1}^*. \quad (4.24)$$

对于二次抛物线公式来说,我们有

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_n^* \approx \nabla \Lambda_{n-1}^* + \nabla^2 \Lambda_{n-1}^* + \nabla^3 \Lambda_{n-1}^* + \nabla^4 \Lambda_{n-1}^* \} \\ \nabla^2 \Lambda_n^* \approx \nabla^2 \Lambda_{n-1}^* + \nabla^3 \Lambda_{n-1}^* + \nabla^4 \Lambda_{n-1}^*. \end{aligned} \quad (4.25)$$

象在前面的情况下一样,高次差分可用前一步长中的一次差分表示。需要差分外推是这一组方法的缺点。

§ 4.2 非规范化四元数的运动学方程。范数修正

在用数值法解算运动学方程时,产生一个同四元数范数偏移有关的特殊困难。问题是,在前一章中曾假定,四元数的范数等于1,即

$$\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = 1. \quad (4.26)$$

特别是,在这种假定下,确定了对应于正交变换的四元数运算。同时,条件(4.26)是不能从运动学方程本身的形式得到的。事实上,(3.11)右乘以 $\tilde{\Lambda}$, 我们便有

$$\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega_E \circ \tilde{\Lambda}. \quad (4.27)$$

● 在这里,同(4.6)类似,采用符号

$$\nabla \Lambda_n = \Lambda_n - \Lambda_{n-1}.$$

转换成共轭值, 则得

$$\Lambda \circ \dot{\tilde{\Lambda}} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \tilde{\omega}_E \circ \tilde{\Lambda} = -\frac{1}{2} \Lambda \circ \omega_E \circ \tilde{\Lambda}. \quad (4.28)$$

(4.27) 和 (4.28) 相加, 我们有

$$\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\tilde{\Lambda}} = 0,$$

即

$$\frac{d}{dt}(\Lambda \circ \tilde{\Lambda}) = 0. \quad (4.29)$$

因此, 方程 (3.11) 有初积分

$$\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \text{常数},$$

并且不能从运动学方程本身得到常数的具体数值, 而只能通过给定合适的初始条件确定。事实上, 由于方程误差和舍入误差, 若不采取特别措施, 随着时间的推移, 等式 (4.26) 将不再得到满足。因此, 阐明非规范化四元数运动学方程的形式可能是有益的。

我们来研究

$$\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda^2 > 0$$

这样的四元数, 而四元数 $\Lambda^{(n)}$ 由于 Λ 规范化而得

$$\Lambda^{(n)} = \frac{1}{\Lambda} \Lambda. \quad (4.30)$$

假定描述坐标系运动的四元数 $\Lambda^{(n)}$ 满足方程

$$\dot{\Lambda}^{(n)} = \frac{1}{2} \Lambda^{(n)} \circ \omega_E. \quad (4.31)$$

微分 (4.30) 并代入 (4.31), 则得四元数 Λ 的微分方程

$$\dot{\Lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \Lambda + \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega_E. \quad (4.32)$$

令

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} = f(t). \quad (4.33)$$

最后我们有

$$\dot{\Lambda} = f(t) \Lambda + \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega_E. \quad (4.34)$$

就 (4.34) 的规范化解满足于方程 (3.11) 这一点来说, 方程 (4.34) 等价于 (3.11)。因此, 不论 $\Lambda(t) > 0$ 的数值及其变化特性

如何, 作为这些方程的解的四元数 $\Lambda^{(n)}$ 和 Λ 都可描述坐标系的同一运动, 即给出同样的变换。但在这种情况下, 非规范化四元数的变换 $\Lambda \circ (\) \circ \Lambda^{-1}$ 对应于规范化四元数的变换 $\Lambda^{(n)} \circ (\) \circ \tilde{\Lambda}^{(n)}$ 。

我们看到, 运动方程中的附加项 $f(t)\Lambda$ 不会改变给定方程的物理涵义。方程(4.34), 也象(3.11)一样, 是描述同一运动的运动方程。对函数 $f(t)$ 的形式不加任何限制。此时, 由于关系式(4.33), 代之范数的方程(4.29), 我们有这样的方程:

$$\frac{d\Lambda}{dt} = f(t)\Lambda. \quad (4.35)$$

利用函数 $f(t)$ 形式选择的任意性, 可使 $\Lambda=1$ 的点成为方程(4.35)渐近稳定的平衡位置。例如, 可以取

$$f = k(1 - \Lambda)$$

或者

$$f = -k \lg \Lambda,$$

但对实用目的来说, 最为方便的是假定

$$f = -k(\Lambda^2 - 1)$$

而解形为

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega_E - k\Lambda(\Lambda^2 - 1) \quad (4.36)$$

的运动学方程。在这种情况下, (4.35)以有限形式积出:

$$\Lambda(t) = \left\{ 1 - \frac{\Lambda_0^2 - 1}{\Lambda_0^2} \exp - 2kt \right\}^{-1/2}.$$

当 $\Lambda_0 > 0$ 时, 有 $\Lambda(t) \rightarrow 1 (t \rightarrow \infty)$ 。因此, 将 $-k\Lambda(\Lambda^2 - 1)$ 这个项引入运动学方程, 可保证解的范数自动修正。

§ 4.3 范数修正的数值法

在前一章中得到的结果表明, 解的范数偏离 1 不会导致坐标系的构成误差。然而, 这种偏离是人们很不希望的, 因为它可能造成计算机的数位溢出, 或者相反, 造成数位利用不足和在某个界限内使解退化为零。此外, 非规范化四元数的正交变换、转动相加等运算较之规范化四元数的相应运算具有更复杂的形式。所有这些

情况都要求限制解的范数偏离1。对于§4.1中探讨的数值法来说,使解周期地规范化就可做到这一点。但在这种情况下,需要相当复杂的计算程序——开方和除法。

在这一节中将建立一组数值法,这种方法的基础是求解能保证范数自动修正的、(4.36)形式的运动学方程。

假定

$$\mathbf{A}_n^* = \mathbf{A}_{n-1}^* \circ \{\mathbf{N}_n^* - k(\Lambda_{n-1}^2 - 1)\}. \quad (4.37)$$

在这里, \mathbf{N}_n^* 根据§4.1数值积分公式中的一个公式来确定。

取(4.37)两端的模数(范数)平方,我们有

$$\Lambda_n^2 = \Lambda_{n-1}^2 \{ |\text{vect } \mathbf{N}_n^*|^2 + [\text{sqal } \mathbf{N}_n^* - k(\Lambda_{n-1}^2 - 1)]^2 \}. \quad (4.38)$$

当 $|\text{vect } \mathbf{N}_n^*| = \text{常数}$, $\text{sqal } \mathbf{N}_n^* = \text{常数}$ 时,表达式(4.38)可确定具有下列稳态值的 Λ_n^2 的递推函数:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_\infty^2 &= 1 + \frac{1}{k} \{ \text{sqal } \mathbf{N}^* \pm \sqrt{1 - |\text{vect } \mathbf{N}^*|^2} \}, \\ \Lambda_\infty^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

我们感兴趣的将是(4.39)的第一关系式中下面一个符号所确定的数值 Λ_∞^2 , 因为就是这个值近似于1或精确地等于1。对于(4.11)~(4.13)确定的方法,我们分别得到

$$\begin{aligned} \Lambda_\infty^2 &\approx 1 + \frac{1}{8k} |\nabla \Theta^*|^2, \\ \Lambda_\infty^2 &\approx 1 + \frac{1}{128k} |\nabla \Theta^*|^4, \\ \Lambda_\infty^2 &\approx 1 - \frac{1}{192k} |\nabla \Theta^*|^4. \end{aligned}$$

对于使用指数表示的方法(4.17)~(4.19)来说,我们总是有

$$\Lambda_\infty^2 = 1.$$

因此,稳态值 Λ_∞^2 近似于1或精确地等于1。

为了分析稳定性,我们来研究导数 $\frac{\partial \Lambda_n^2}{\partial \Lambda_{n-1}^2}$ 并要求

$$\left| \frac{\partial \Lambda_n^2}{\partial \Lambda_{n-1}^2} \right|_{\Lambda_{n-1}^2 = \Lambda_\infty^2} < 1. \quad (4.40)$$

微分(4.38)并以 $\Lambda_{n-1}^2 = \Lambda_\infty^2$ 代入,在经过某些变换后我们有

$$\left. \frac{\partial \Lambda_n^2}{\partial \Lambda_{n-1}^2} \right|_{\Lambda_{n-1}^2 = \Lambda_n^2} = 1 - 2k\Lambda_\infty^2 \sqrt{1 - |\text{vect } \mathbf{N}^*|^2}. \quad (4.41)$$

此时, 不等式(4.40)变为条件

$$0 < k < \Lambda_\infty^{-2} \bullet [(1 - |\text{vect } \mathbf{N}^*|^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

或者, 顾及到(4.39)化为

$$0 < k < \frac{1}{\sqrt{1 - |\text{vect } \mathbf{N}^*|^2}} + \sqrt{1 - |\text{vect } \mathbf{N}^*|^2} - \text{sqa} \mathbf{N}^*. \quad (4.42)$$

如果要求持有条件

$$0 < k < 1,$$

不等式(4.42)显然将得到满足。可以证明, 在此种条件下, 其它两稳态值 Λ_∞^2 (4.39) 就不稳定了。

自然地如选择 $k=1/2$, 在这种情况下, 表达式(4.41)非常近似于零, 即近似于保证最大收敛速度的数值。

我们来研究在任意有限的 $\nabla \Theta_n^*$ 的情况下范数修正过程的稳定性。在这种情况下, 递推函数决定于 n , 而且

$$\Lambda_-^2 = \Lambda^2(1.5 - 0.5\Lambda^2) \quad (4.43)$$

和

$$\Lambda_+^2 = \Lambda^2 \{ |\text{vect } \mathbf{N}^*|^2 + [\text{sqa} \mathbf{N}^* - 0.5(\Lambda^2 - 1)]^2 \} \quad (4.44)$$

两表达式 \bullet 是 $|\nabla \Theta_n^*|$ 分别取零或最大值时得到的、(4.38)的下界递推函数和上界递推函数。对于(4.17)~(4.19)的方法来说, 下界函数和上界函数具有相同的不变稳定点 $\Lambda_\infty^2 = 1$ 。此时, 递推函数本身显然也将具有相同的不变稳定点。

对于方法(4.11)~(4.13)来说, 表达式(4.43)和(4.44)确定了虽然相近, 但不相同的不变点。所以, Λ_n^2 收敛于含有这些点的某一极限线段。可以证明, 这一线段的界等于:

$$\Lambda_{\max}^2 = \max_{0 < \Lambda < \Lambda_\infty} \{ \Lambda_+^2(\Lambda^2) \},$$

$$\Lambda_{\min}^2 = \Lambda_-^2(\Lambda_{\max}^2).$$

对于欧拉法来说, 极限线段自然具有最大长度:

● 原书误为 Λ_∞^2 。——校者

● 在这里以及后面所有的公式中都假定, $k=1/2$ 。

$$1 - \frac{3}{64} |\nabla \Theta^*|^4 \leq \Lambda^2 \leq 1 + \frac{1}{4} |\nabla \Theta^*|^2.$$

现在,在证明范数修正的稳定性之后,我们将式(4.37)变换成便于误差估计的形式。为此,我们力求消去用初始信号表示的 Λ_{n-1}^2 。在等式(4.38)中,假定

$$\Lambda_n^2 = 1 + \kappa_n. \quad (4.45)$$

我们有

$$\kappa_n = (1 + \kappa_{n-1}) \left\{ |\text{vect } \mathbf{N}_n^*|^2 + \left[\text{sqal } \mathbf{N}_n^* - \frac{1}{2} \kappa_{n-1} \right]^2 \right\} - 1.$$

将 n 换成 $n-1$ 和经过某些变换之后,我们将得到表达式

$$\kappa_{n-1} = (1 + \kappa_{n-2}) \left[(\mathbf{N}_{n-1}^* \circ \tilde{\mathbf{N}}_{n-1}^*) - \kappa_{n-2} \text{sqal } \mathbf{N}_{n-1}^* + \frac{1}{4} \kappa_{n-2}^2 \right] - 1,$$

最后,从该式得到

$$\begin{aligned} \kappa_{n-1} = & [(\mathbf{N}_{n-1}^* \circ \tilde{\mathbf{N}}_{n-1}^*) - 1] + \kappa_{n-2} [(\mathbf{N}_{n-1}^* \circ \tilde{\mathbf{N}}_{n-1}^*) - \text{sqal } \mathbf{N}_{n-1}^*] \\ & - \kappa_{n-2}^2 \left[\text{sqal } \mathbf{N}_{n-1}^* - \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{4} \kappa_{n-2}^3. \end{aligned} \quad (4.46)$$

为了缩减递推关系式(4.46),于其中代入根据同一关系式计算出的 κ_{n-2} ,之后,依同理消去 κ_{n-3} 等等。

对于方法(4.11)~(4.13)来说,我们分别以四阶微量的准确度得到

$$\kappa_{n-1} \approx \frac{1}{4} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^2 + \frac{1}{16} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^2 |\nabla \Theta_{n-2}^*|^2 - \frac{3}{64} |\nabla \Theta_{n-2}^*|^4, \quad (4.47)$$

$$\kappa_{n-1} \approx \frac{1}{64} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^4, \quad (4.48)$$

$$\kappa_{n-1} \approx \frac{1}{192} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^4, \quad (4.49)$$

利用等式(4.47)~(4.49),考虑到(4.45),可从式(4.37)消去 Λ_{n-1}^2 。

因此,对于所述方法来说,可用表达式

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \mathbf{N}_n^{**} \quad (4.50)$$

代替(4.37),在(4.50)中 \mathbf{N}^{**} 分别等于;

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_n^{**} &= 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^2 \\
&\quad - \frac{1}{32} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^2 |\nabla \Theta_{n-2}^*|^2 + \frac{3}{128} |\nabla \Theta_{n-2}^*|^4, \\
\mathbf{N}_n^{**} &= 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_n^*|^2 - \frac{1}{128} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^4, \\
\mathbf{N}_n^{**} &= 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_n^*|^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \\
&\quad - \frac{1}{48} |\nabla \Theta_n^*|^2 \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{384} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^4.
\end{aligned}$$

对于方法(4.17)~(4.19)来说,以四阶微量的准确度得到

$$\kappa_{n-1} \approx 0.$$

因此,对于方法(4.17)~(4.19), \mathbf{N}_n^{**} 和 \mathbf{N}_n^* 的表达式相等。

§ 4.4 定步长情况下数值法的误差

我们用 $\Delta \Lambda_n$ 来表示近似式和精确式算出的值 Λ_n 之间的差:

$$\Delta \Lambda_n = \Lambda_n^* - \Lambda_n.$$

比较(4.4)和(4.50)并假定前步之值 Λ_{n-1}^* 是准确的,我们有

$$\Delta \Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \delta \mathbf{N}_n.$$

在这里

$$\delta \mathbf{N}_n = \mathbf{N}_n^* - \mathbf{N}_n \quad (4.51)$$

是范数没有修正的方法在积分步长内的误差。对于范数修正的方法,相应地有

$$\delta \mathbf{N}_n = \mathbf{N}_n^{**} - \mathbf{N}_n. \quad (4.52)$$

各种数值法 $\delta \mathbf{N}_n$ 的具体形式列于表 4.1。

为了估计大的积分区间内累加的误差,将 Λ_n 表成:

$$\Lambda_n = \Lambda_0 \circ \mathbf{N}_1 \circ \cdots \circ \mathbf{N}_{n-1} \circ \mathbf{N}_n; \quad (4.53)$$

顾及到(4.51)和(4.52),同理可将 Λ_n^* 表成

$$\Lambda_n^* = \Lambda_0 \circ (\mathbf{N}_1 + \delta \mathbf{N}_1) \circ \cdots \circ (\mathbf{N}_{n-1} + \delta \mathbf{N}_{n-1}) \circ (\mathbf{N}_n + \delta \mathbf{N}_n) \quad (4.54)$$

● 原书最后一项误为 $+\frac{3}{64} |\nabla \Theta_{n-1}^*|^2$ 。——校者

表 4.1 积分步长内的数值法误差

数 值 法	∂N_n
欧拉法	$\frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2$
改进欧拉法	$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* \right)$ $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 \right)$ $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 \right.$ $\left. + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* \right]$ $-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$ $-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) + \frac{1}{192} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla^2 \Theta_n^* - \frac{1}{384} \nabla \Theta_n^* ^4$
平均速度法	$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*)$ $-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*)$
范数修正的欧拉法	$-\frac{1}{4} \nabla \Theta_n^* \cdot \nabla^2 \Theta_n^* - \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$

(续表)

数 值 法	δN_n
<p>范数修正的改进欧拉法</p> $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right]$ $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right]$	$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$ $-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) + \frac{1}{192} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla^2 \Theta_n^*$
<p>范数修正的平均速度法</p> $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[\exp \left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* \right) + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right]$ $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left\{ \exp \left[\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right] + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right\}$ $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$ $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$ $\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1}$ $\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$ $+ \frac{1}{24} (\nabla \Lambda_{n-1} \circ \nabla^2 \Theta_n^* - \nabla^2 \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*)$ $\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$ $\nabla^2 \Lambda_n = \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$	$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*)$ $-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*)$ $\frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2$ $-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{96} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
	$-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) + \frac{1}{96} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla^2 \Theta_n^* - \frac{1}{123} \nabla \Theta_n^* ^4$

对于相对于 Λ_n 的累加误差的四元数 Λ_n^* , 我们有

$$\delta\Lambda_n = \Lambda_n^* \circ \tilde{\Lambda}_n. \quad (4.55)$$

因为 Λ_n 是规范化四元数, 所以

$$|\delta\Lambda_n| = |\Lambda_n^*| = \prod_{k=1}^n |\mathbf{N}_k^*|, \quad (4.56)$$

式中

$$\mathbf{N}_k^* = |\mathbf{N}_k^*|.$$

对于模的累加误差, 我们得到表达式

$$\delta\Lambda_n^* = \prod_{k=1}^n \mathbf{N}_k^* - 1 = \prod_{k=1}^n (1 + \delta N_k) - 1 = \sum_{k=1}^n \delta N_k + O(\delta N_k^2). \quad (4.57)$$

在这里, 用 δN_n 表示给定步长内模的误差 N_n^* 。各种数值法 δN_n 的具体形式列于表 4.2。

表达式(4.57)中之和可用积分

$$\delta\Lambda^* \approx \frac{1}{h} \int_0^t \delta N(t') dt' \quad (4.58)$$

以更高阶微量项的准确度代替。表 4.3 列出了模的累加误差 $\delta\Lambda^*$ 及其偏离速度的具体形式。此时考虑到

$$\nabla^k \Theta_n^* \approx h^k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (\omega_E).$$

我们发现, 式(4.58)确定的累加误差的分量不会造成坐标系的构成误差 (见 § 4.2), 且可通过 Λ^* 周期地规范化消除。

现在我们研究不能通过规范化消除的累加误差分量。使(4.55)规范化, 我们有

$$\delta\Lambda^{(n)} = \frac{1}{\Lambda_n^*} \delta\Lambda_n = \frac{1}{\Lambda_n^*} \Lambda_n^* \circ \tilde{\Lambda}_n. \quad (4.59)$$

用(4.53)、(4.54)、(4.56)代入(4.59), 我们得到

$$\delta\Lambda_n^{(n)} = \Lambda_0 \circ [\mathbf{N}_1 + \delta\mathbf{N}_1^{(n)}] \circ \dots \circ [\mathbf{N}_n + \delta\mathbf{N}_n^{(n)}] \circ \tilde{\mathbf{N}}_n \circ \dots \circ \tilde{\mathbf{N}}_1 \circ \tilde{\Lambda}_0.$$

在这里

$$\delta\mathbf{N}_n^{(n)} = \frac{1}{\mathbf{N}_n} (\mathbf{N}_n + \delta\mathbf{N}_n) - \mathbf{N}_n$$

是规范化后在步长内保留下来的误差。各种数值法 $\delta\mathbf{N}_n^{(n)}$ 的具体表达式列于表 4.4。我们发现, 就是这个分量会造成坐标系的构成误差。

表 4.2 积分步长内模的误差

数	值	法	模的误差 δN_n
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right)$			$\frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2\right)$			$\frac{1}{128} \nabla \Theta_n^* ^4$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{24} \langle \nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^* \rangle - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*\right]$			$-\frac{1}{384} \nabla \Theta_n^* ^4$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right)$			—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp\left\{\frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} \langle \nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^* \rangle\right]\right\}$			—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$			$\frac{1}{8} (\nabla \Theta_n^* ^2 - \nabla \Theta_{n-1}^* ^2)$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$			$\frac{1}{128} (\nabla \Theta_n^* ^4 - \nabla \Theta_{n-1}^* ^4)$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{24} \langle \nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^* \rangle - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$			$-\frac{1}{384} (\nabla \Theta_n^* ^4 - \nabla \Theta_{n-1}^* ^4)$

(续表)

数	值	法	模的误差 δN_n
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ$	$\left[\exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right) + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right]$	—	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ$	$\left\{ \exp\left(\frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right] \right) \right.$	—	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$	$\left. + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right\}$	$\frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2$	$\frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*$	$\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1}$	$\frac{5}{384} \nabla \Theta_n^* ^4$	$\frac{5}{384} \nabla \Theta_n^* ^4$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*$	$+ \frac{1}{24} (\nabla \Lambda_n \circ \nabla^2 \Theta_n^* - \nabla^2 \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*)$	$\frac{5}{192} \nabla \Theta_n^* ^4$	$\frac{5}{192} \nabla \Theta_n^* ^4$
$\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$	$\nabla^2 \Lambda_n = \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$		

表 4.3 模的累加误差及其偏离速度

数 值 法	模 的 误 差 $\delta\Lambda^*$	偏离速度 $\frac{d\delta\Lambda^*}{dt}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right)$	$\frac{h}{8} \int_0^t \omega^2 dt'$	$\frac{h}{8} \omega^2$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2\right)$	$\frac{h^3}{128} \int_0^t \omega^4 dt'$	$\frac{h^3}{128} \omega^4$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*\right]$	$-\frac{h^3}{384} \int_0^t \omega^4 dt'$	$-\frac{h^3}{384} \omega^4$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right)$	—	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp\left\{\frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*)\right]\right\}$	—	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2 - 1)\right]$	$\frac{1}{8} h^2 \omega^2$	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2 - 1)\right]$	$\frac{1}{128} h^4 \omega^4$	—

(续表)

数 值 法	模 的 误 差 $\delta\Lambda^*$	偏离速度 $\frac{d\delta\Lambda^*}{dt}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right. \\ \left. - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Delta_n^2) \right]$	$-\frac{1}{384} h^4 \omega^4$	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[\exp \left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* \right) + \frac{1}{2} (1 - \Delta_n^2) \right]$	—	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right] \right) + \frac{1}{2} (1 - \Delta_n^2) \right\}$	—	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$	$\frac{h}{8} \int_0^t \omega^2 dt'$	$\frac{h}{8} \omega^2$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$	$\frac{5}{384} h^3 \int_0^t \omega^4 dt'$	$\frac{5}{384} h^3 \omega^4$
$\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1}$		
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* \\ + \frac{1}{24} (\nabla \Lambda_{n-1} \circ \nabla^2 \Theta_n^* - \nabla^2 \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*)$	$\frac{5}{192} h^3 \int_0^t \omega^4 dt'$	$\frac{5}{192} h^3 \omega^4$
$\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$		
$\nabla^2 \Lambda_n = \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$		

表 4.4 步长内不能用规范化消除的误差

数	值	法	$\delta N_n^{(m)}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right)$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{24} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2\right)$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*\right]$			$-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{192} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp \left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* \right)$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*)$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right] \right\}$			$-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*)$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2) \right]$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2) \right]$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$

(续表)

数	值	法	$\delta N_n^{(a)}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ$	$\left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right.$ $\left. - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right]$		$-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) + \frac{1}{192} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[\exp \left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* \right) + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right]$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*)$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right] \right) + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2) \right\}$			$-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*)$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{24} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*$			$-\frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) + \frac{1}{96} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^*$
$\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1}$			
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*$ $+ \frac{1}{24} (\nabla \Lambda_n \circ \Delta \Theta_n^* - \nabla^3 \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*)$			$-\frac{1}{48} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^3 \Theta_n^*) + \frac{1}{96} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla^2 \Theta_n^* - \frac{3}{128} \nabla \Theta_n^* ^4$
$\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$			
$\nabla^2 \Lambda_n = \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$			

下面,同前一种情况类似,我们有

$$\begin{aligned}\delta\Lambda^{(n)} &= 1 + \sum_{k=1}^n \Lambda_0 \circ \mathbf{N}_1 \circ \cdots \circ \mathbf{N}_{k-1} \circ \delta\mathbf{N}_k^{(n)} \circ \tilde{\mathbf{N}}_{k-1} \circ \cdots \circ \tilde{\mathbf{N}}_1 \circ \tilde{\Lambda}_0 \\ &\quad + O(\delta\mathbf{N}_k^{*2}) = 1 + \sum_{k=1}^n \Lambda_{k-1} \circ \delta\mathbf{N}_k^{(n)} \circ \tilde{\Lambda}_k + O(\delta\mathbf{N}_k^{*2}).\end{aligned}$$

用积分代替和,我们得到

$$\delta\Lambda^{(n)} \approx 1 + \frac{1}{h} \int_0^t \Lambda(t') \circ \delta\mathbf{N}^{(n)}(t') \circ \tilde{\Lambda}(t') dt'.$$

我们用真实转动矢量 Θ 表示 $\delta\Lambda^{(n)}$:

$$\delta\Lambda^{(n)} = \cos \frac{1}{2} \delta\Theta + \zeta \sin \frac{1}{2} \delta\Theta.$$

由此可求出

$$\delta\Theta = 2\zeta \operatorname{arctg} \frac{|\operatorname{vect}[\delta\Lambda^{(n)}]|}{\operatorname{sqal}(\delta\Lambda^{(n)})}$$

或者

$$\delta\Theta \approx 2 \operatorname{vect}[\delta\Lambda^{(n)}].$$

量 $\delta\Theta$ 决定坐标系统的真实位置对计算位置的偏差,即位置误差。

不难看出,

$$\operatorname{vect}\left(\int_0^t \Lambda \circ \delta\mathbf{N}^{(n)} \circ \tilde{\Lambda} dt'\right) = \int_0^t \Lambda \circ \operatorname{vect}(\delta\mathbf{N}^{(n)}) \circ \tilde{\Lambda} dt'.$$

考虑到这一点,我们得到真实转动矢量(“角度”)累加误差的下列表达式:

$$\delta\Theta \approx \frac{2}{h} \int_0^t \Lambda(t') \circ \operatorname{vect}[\delta\mathbf{N}^{(n)}(t')] \circ \tilde{\Lambda}(t') dt'. \quad (4.60)$$

表 4.5 中列出了各种数值法的 $\delta\Theta$ 及其偏离速度的具体表达式。

我们发现,对于所有的方法,其中包括欧拉法在内,量 $\delta\Theta$ 的阶都不低于 h^2 。

§ 4.5 变步长的数值积分法

将角速度的信息输入数字计算机需要用四元数来表示这一信息。在捷联式系统中,角速度(确切地说,矢量 Θ^* 的增量)的量化过程,通常,与其测量过程是同一过程。换句话说,角速度测量组

表 4.5 位置累加误差及其偏离速度

数	值	法	位置累加误差 $\delta\Theta$	偏离速度 $\frac{d\delta\Theta}{dt}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*\right)$			$-\frac{\hbar^2}{12} \int_0^t \Lambda_0 (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $-\frac{\hbar^2}{12} \int_0^t \Lambda_0 (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $-\frac{\hbar^2}{12} \int_0^t \Lambda_0 (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $+\frac{\hbar^2}{24} \int_0^t \Lambda_0 (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt'$	$\frac{\hbar^2}{12} \sqrt{ \omega \times \dot{\omega} ^2 + \omega^6}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2\right)$			$-\frac{\hbar^2}{12} \int_0^t \Lambda_0 (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $-\frac{\hbar^2}{12} \int_0^t \Lambda_0 (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $-\frac{\hbar^2}{12} \int_0^t \Lambda_0 (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $+\frac{\hbar^2}{24} \int_0^t \Lambda_0 (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $-\frac{\hbar^3}{24} \int_0^t \Lambda_0 (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $+\frac{\hbar^3}{96} \int_0^t \Lambda_0 (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $-\frac{\hbar^2}{12} \int_0^t \Lambda_0 (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $-\frac{\hbar^3}{24} \int_0^t \Lambda_0 (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$	$\frac{\hbar^2}{12} \sqrt{ \omega \times \dot{\omega} ^2 + \frac{1}{4} \omega^6}$ $\frac{\hbar^3}{24} \left (\omega \times \dot{\omega}) - \frac{1}{4} \omega^2 \dot{\omega} \right $
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 \right.$ $\left. + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* \right]$				
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \exp \left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* \right)$				$\frac{\hbar^2}{12} \omega \times \dot{\omega} $
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right] \right\}$				$\frac{\hbar^2}{24} \omega \times \dot{\omega} $

(续表)

数 值 法	位置累加误差 $\delta\Theta$	偏离速度 $\left \frac{d\delta\Theta}{dt} \right $
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2) \right]$	$-\frac{h^2}{12} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $+\frac{h^2}{24} \int_0^t \Lambda \circ (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt'$	$\frac{h^2}{12} \sqrt{ \omega \times \dot{\omega} ^2 + \frac{1}{4} \omega^6}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2) \right]$	$-\frac{h^2}{12} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $+\frac{h^2}{24} \int_0^t \Lambda \circ (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt'$	$\frac{h^2}{12} \sqrt{ \omega \times \dot{\omega} + \frac{1}{4} \omega^6}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} \nabla \Theta_n^* ^2 \right.$ $\left. + \frac{1}{24} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) - \frac{1}{48} \nabla \Theta_n^* ^2 \nabla \Theta_n^* \right.$ $\left. + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2) \right]$	$-\frac{h^2}{24} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$ $+\frac{h^2}{96} \int_0^t \Lambda \circ (\omega^2 \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$	$\frac{h^3}{24} \left \omega \times \ddot{\omega} - \frac{1}{4} \omega^2 \dot{\omega} \right $
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[\exp \left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* \right) + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2) \right]$	$-\frac{h^2}{12} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$	$\frac{h^2}{12} \omega \times \dot{\omega} $
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left\{ \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\nabla \Theta_n^* + \frac{1}{12} (\nabla \Theta_n^* \times \nabla^2 \Theta_n^*) \right] \right\} \right.$ $\left. + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_n^2) \right\}$	$-\frac{h^2}{24} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt'$	$\frac{h^3}{24} \omega \times \ddot{\omega} $

(续表)

数 值 法	位置累加误差 $\delta\Theta$	偏离速度 $\left \frac{d\delta\Theta}{dt} \right $
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^*$	$-\frac{h^2}{12} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt$	$\frac{h^2}{12} \sqrt{ \omega \times \dot{\omega} ^2 + \omega^6}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*$	$-\frac{h^2}{12} \int_0^t \Lambda \circ (\omega^3 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt$	
$\nabla \Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1}$	$-\frac{h^2}{12} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \dot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt$	$\frac{h^2}{12} \sqrt{ \omega \times \dot{\omega} ^2 + \frac{1}{16} \omega^6}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} + \frac{1}{2} \Lambda_{n-1} \circ \nabla \Theta_n^* + \frac{1}{4} \nabla \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*$	$+\frac{h^2}{48} \int_0^t \Lambda \circ (\omega^2 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt$	
$+\frac{1}{24} (\nabla \Lambda_n \circ \nabla^2 \Theta_n^* - \nabla^2 \Lambda_n \circ \nabla \Theta_n^*)$	$-\frac{h^3}{24} \int_0^t \Lambda \circ (\omega \times \ddot{\omega}) \circ \tilde{\Lambda} dt$	$\frac{h^3}{24} \left \omega \times \ddot{\omega} - \frac{1}{2} \omega^2 \dot{\omega} \right $
$\Lambda_n = \nabla \Lambda_{n-1} + \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$	$+\frac{h^2}{48} \int_0^t \Lambda \circ (\omega^3 \omega) \circ \tilde{\Lambda} dt$	
$\nabla^2 \Lambda_n = \nabla^2 \Lambda_{n-1} + \nabla^3 \Lambda_{n-1} + \nabla^4 \Lambda_{n-1}$		

合(传感器)输出端上的信息以一系列增量量化后的值 $\nabla\Theta^{**}$ 的形式表示(量化值将以两个星号表示)。此时,给定通道●中的初始增量(脉冲)具有下列形式:

$$\nabla\Theta_1^{**} = \pm \varepsilon e_1, \quad \nabla\Theta_2^{**} = \pm \varepsilon e_2, \quad \nabla\Theta_3^{**} = \pm \varepsilon e_3,$$

式中, ε 是量化值。

为了实现定步长数值积分的算法,需要将计算机输出端的初始增量累加在专用计数器中并定期地(在每一步长的终端)访问这些计数器。

在计算机十分快速的情况下,可以消除增量的累加过程并将每一积分步长的终点同每一初始增量的到达时刻经任意通道联系起来。此时,积分步长是随初始增量到达计算机输入端的速度而变的。

在这些条件下,可直接应用仅利用一次差分的数值积分法,即普通欧拉法(4.11)和改进欧拉法(4.12)、平均速度法(4.17)以及相应的范数修正法。上面推导出的误差估计公式不能直接用于这种情况。

我们引入一个总转角

$$\Phi = \int_0^t \omega(t') dt'$$

作为运动学方程中的自变量。正如 § 3.4 中所证明的,在如此代换变量的情况下,运动学方程的形式保持不变,但角速度矢量(在我们这种情况下为 ω_E)的作用由其单位矢

$$e_\omega = (e_{\omega_1}, e_{\omega_2}, e_{\omega_3})$$

来实现。因此,用撇号(')表示 Φ 的微分,根据(3.74)我们有

$$\Lambda' = \frac{1}{2} \Lambda \circ e_\omega.$$

本章全部公式的形式同样保持不变,只是在时间步长 h 的相应位置上代之以总转角的步长 g 。

总之,更换自变量使之能够将前述各节的公式推广到 h 可变

● 我们将假定,通道中含有测量给定轴上投影的敏感元件和变换装置。

而 g 固定的情况。此时

$$\nabla^k \Theta^* \approx g^k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (e_\omega).$$

当根据每一初始增量运算时, 步长 g , 一般说来, 不是固定不变的, 但变化的范围很小:

$$\varepsilon \leq g \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon.$$

我们来研究某一积分区间内步长 g 的平均值。假定第 i 个通路中脉冲(初始增量)总数等于 K_i 。又令

$$g_{cp} = \frac{\Phi}{K_1 + K_2 + K_3}.$$

另一方面

$$K_i \approx \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |\omega_i| d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\Phi |e_{\omega_i}| d\Phi' \approx \frac{1}{\varepsilon} |e_{\omega_i}| \Phi.$$

于是

$$g_{cp} = \frac{\varepsilon}{|e_{\omega_1}| + |e_{\omega_2}| + |e_{\omega_3}|}$$

或者最后

$$g_{cp} = \chi \varepsilon,$$

式中

$$\chi \approx \frac{1}{|e_{\omega_1}| + |e_{\omega_2}| + |e_{\omega_3}|}.$$

显然

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \chi \leq 1.$$

自然可以假定, χ (因而也就是 g_{cp}) 为缓变变量。在此种情况下, 类似于(4.58)和(4.60), 在根据初始增量运算时, 可以得到累加误差的估值:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Lambda^* &= \int_0^\Phi \delta N \frac{d\Phi'}{g}, \\ \delta \Theta &= 2 \int_0^\Phi \Lambda \circ \text{vect}(\delta \mathbf{N}^{(n)}) \circ \tilde{\Lambda} \frac{d\Phi'}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

各种数值法的 $\delta \Lambda^*$ 、 $\delta \Theta$ 以及相应偏离速度的具体形式列于表 4.6 和表 4.7。

表 4.6 按增量工作时模的累加误差及其偏离速度

数 值 法	累加误差 $\delta\Lambda^*$	偏离速度 $\frac{d\delta\Lambda^*}{dt}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**}\right)$	$\frac{1}{8} e \int_0^\Phi \chi^2 d\Phi$	$\frac{1}{8} e \chi \omega$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**} - \frac{1}{8} e^2\right)$	$\frac{1}{128} e^3 \int_0^\Phi \chi^2 d\Phi$	$\frac{1}{128} e^3 \chi^3 \omega$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**}\right)$	—	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**} + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$	$\frac{1}{8} e^2$	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**} - \frac{1}{8} e^2 - \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$	$\frac{1}{128} e^4$	—
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[\exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**}\right) + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$	—	—

表 4.7 按增量工作时位置的累加误差及其偏离速度

数	值	法	累加误差 $\delta\Theta$	偏离速度 $\frac{d\delta\Theta}{dt}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**}\right)$			$-\frac{e^2}{12} \int_0^\Phi \Lambda \circ \left(e_\omega \times \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right) \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$ $-\frac{e^2}{12} \int_0^\Phi \Lambda \circ e_\omega \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$	$\frac{e^2}{12} \chi^2 \omega \sqrt{1 + \left \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right ^2}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left(1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**} - \frac{1}{8} e^2\right)$			$-\frac{e^2}{12} \int_0^\Phi \Lambda \circ \left(e_\omega \times \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right) \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$ $+\frac{e^2}{24} \int_0^\Phi \Lambda \circ e_\omega \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$	$\frac{e^2}{12} \chi^2 \omega \sqrt{\frac{1}{4} + \left \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right ^2}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**}\right)$			$-\frac{e^2}{12} \int_0^\Phi \Lambda \circ \left(e_\omega \times \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right) \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$	$\frac{e^2}{12} \chi^2 \omega \left \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right $
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**} + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$			$-\frac{e^2}{12} \int_0^\Phi \Lambda \circ \left(e_\omega \times \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right) \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$ $+\frac{e^2}{24} \int_0^\Phi \Lambda \circ e_\omega \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$	$\frac{e^2}{12} \chi^2 \omega \sqrt{\frac{1}{4} + \left \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right ^2}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**} - \frac{1}{8} e^2 + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$			$-\frac{e^2}{12} \int_0^\Phi \Lambda \circ \left(e_\omega \times \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right) \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$ $+\frac{e^2}{24} \int_0^\Phi \Lambda \circ e_\omega \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$	$\frac{e^2}{12} \chi^2 \omega \sqrt{\frac{1}{4} + \left \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right ^2}$
$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \left[\exp\left(\frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{**}\right) + \frac{1}{2} (1 - \Lambda_{n-1}^2)\right]$			$-\frac{e^2}{12} \int_0^\Phi \Lambda \circ \left(e_\omega \times \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right) \circ \tilde{\Lambda} \chi^2 d\Phi'$	$\frac{e^2}{12} \chi^2 \omega \left \frac{\partial e_\omega}{\partial \Phi}\right $

分析积分公式(4.11)、(4.12)、(4.17)相应的范数修正积分公式,可以证明,根据增量运算时,上述公式的实现必将在步长内导致较小的计算容量。此时,对于普通欧拉法和改进欧拉法来说,必须选择等于 2^{-k} (k 是整数)的量化了的量。在这种情况下,排除了乘法运算或为移位所代替。出自同样的理由,对于平均速度法选择

$$\varepsilon = 2 \arcsin 2^{-k}$$

是有利的。

另一方面,利用积分仪输入端上的计数器使之能够应用较大步长的高阶数值法:此时,每秒的平均运算量,在误差相同的情况下也要比根据增量运算时小些。因此,只能根据具体问题的详细分析来选择积分方法。

还应注意,在实际情况下,输给计算机输入端的信息中可能含有噪声,因此,应该避免直接或间接利用微分运算的那些方法。在这方面来说,利用运动学方程的近似解的(4.11)~(4.13)和(4.17)~(4.19),较之古典差分格式[其中包括(4.22)~(4.25)]具有一定的优越性。此外,函数 $\omega_E(t)$ 本身不总是十分平滑的,所以,在这种情况下,利用高阶的数值法甚至会增大积分误差。

§ 4.6 量化误差

在推导前述各节的公式时,未曾研究因使用量化值 $\nabla \Theta^{**}$ 代替矢量的真值 $\nabla \Theta^*$ 而引起的特有误差。量化过程是在计算机的外面进行的,因此,量化误差既不取决于积分步长,也不取决于所用的数值法,而是决定于有限转动相加的非可易性[●]。

为了估计量化误差,我们来研究单位矢 e_ω 给定的平面旋转。

当平面旋转时,矢量 Θ 、 Θ^* 和 $e_\omega \Phi$ 相等,所以

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \exp \left(\frac{1}{2} e_\omega \Phi \right)。$$

● 在用有限位的数字计算机计算的过程中,会产生由于舍入而出现的误差的附加成份。其大小取决于步长的长度、每一步长的计算量、舍入方法、位数以及是否进行定点或浮点运算。在本节中不研究这种分量。

我们用 Φ_i 表示第 i 个通道中相邻脉冲间每一积分区间内的总转角。显然,

$$\Phi_i = \frac{\varepsilon}{|\varrho_{\omega_i}|} \quad (i=1, 2, 3)。$$

为确切起见, 设

$$\Phi_1 \geq \Phi_2 \geq \Phi_3。 \quad (4.62)$$

此时, 第 i 个通道中总转角为 Φ 的区间内的脉冲数 K_i , 显然, 满足于条件

$$K_1 \leq K_2 \leq K_3。$$

我们选择等于 Φ_1 的区间 Φ 。此时, $K_1=1$ 。此外, 若干区间内的平均值●

$$K_2 = \frac{|\varrho_{\omega_2}|}{|\varrho_{\omega_1}|}, \quad K_3 = \frac{|\varrho_{\omega_3}|}{|\varrho_{\omega_1}|}。$$

我们来研究第二通道与第三通道中公共脉冲的平均脉冲数:

$$K_{23} = \frac{|\varrho_{\omega_3}|}{|\varrho_{\omega_2}|}。$$

为了估计误差, 应该在 Φ 区间上给出最坏的脉冲分布。假定, 首先输入第三个通道中 K_{23} 个脉冲, 尔后, 输入第二通道中一个脉冲。这一过程被重复 K_2 次, 尔后, 输入第一通道中的一个脉冲。这种脉冲序列(初始增量)就对应于四元数

$$\begin{aligned} \Lambda^{***} = & \Lambda_0 \circ \exp \left[\frac{1}{2} i_3 \varepsilon K_{23} \operatorname{sign}(\varrho_{\omega_3}) \right] \circ \exp \left[\frac{1}{2} \right. \\ & \left. \times i_2 \varepsilon \operatorname{sign}(\varrho_{\omega_2}) \right] \circ \exp \left[\frac{1}{2} i_1 \varepsilon \operatorname{sign}(\varrho_{\omega_1}) \right]。 \end{aligned}$$

同时, 四元数

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \exp \left(\frac{1}{2} \varrho_{\omega} \frac{\varepsilon}{|\varrho_{\omega_1}|} \right)$$

相当于真实运动。偏差四元数等于

$$\Lambda_p = \Lambda^{***} \circ \tilde{\Lambda}_0。$$

令

$$\frac{\varepsilon}{|\varrho_{\omega_1}|} \ll 1, \quad (4.63)$$

● 被看作是某一区间平均数的量 K_2, K_3, K_{23} , 一般说来, 可能不是整数。

经过相应的变换之后, 得到

$$\Lambda_p = 1 + \frac{1}{4} \varepsilon \Phi \{ \dot{\mathbf{i}}_1 e_{\omega_1} \text{sign}(e_{\omega_1}) + \dot{\mathbf{i}}_2 e_{\omega_2} \text{sign}(e_{\omega_2}) - \dot{\mathbf{i}}_3 e_{\omega_3} \text{sign}(e_{\omega_3}) \} + \dots$$

从(4.61)得到

$$\left| \frac{d\delta\Theta}{d\Phi} \right| = 2 \left| \text{vect} \left(\frac{d\Lambda_p}{d\Phi} \right) \right|$$

或者

$$\left| \frac{d\delta\Theta}{d\Phi} \right| = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{2e_{\omega_1}^2 + e_{\omega_2}^2}.$$

类似的公式不仅在(4.62)这样的条件下, 而且在 Φ_1 、 Φ_2 、 Φ_3 之间任何关系的情况下都可以得到。不同之处将仅仅在相应下标的序号上。

量 e_{ω_i} 是方向余弦, 因此,

$$e_{\omega_1}^2 + e_{\omega_2}^2 + e_{\omega_3}^2 = 1$$

和

$$\left| \frac{d\delta\Theta}{d\Phi} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \quad (4.64)$$

可以证明, 在推导(4.64)时使用的条件(4.63)受到破坏时, 估值(4.64)仍然是正确的。从式(4.64)可以看出, 为了减小位置的累加误差, 必须首先减小量化值。

§ 4.7 泊松方程中模和角的稳定

大家都知道, 泊松方程(3.38)可写成矢量形式。例如, 对于(3.38)的左面一组方程来说, 我们有

$$\dot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}_i \times \boldsymbol{\omega} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.65)$$

式中

$$\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}), \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

类似于 § 4.2, 我们来研究非规范化矢量与(4.65)等价的方程。假定, 我们感兴趣的是刚体相对于某一轴的位置, 而不是绕该轴的旋转。在此种情况下, 可限于讨论(4.65)中的一个方程

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}.$$

不难看出, 就(4.31)和(4.32)相同这一意义来说, 它等价于方程

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}_0.$$

与模稳定的式(4.34)相类似, 可以假定

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{a}f(a) + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}_0,$$

式中, 例如

$$f(a) = -k(a^2 - 1).$$

在一般情况下, 应给定刚体相对于两个非重合轴的位置:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}_0, \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

可用方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}f(a) + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}_0, \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}f(b) + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

代替(4.66), 而对模的稳定性来说, 两者依然是等价的。

在稳定泊松方程中所含矢量模的同时, 必须稳定矢量之间的角值。事实上, (4.66)中第一方程同 \mathbf{b} , 而第二方程同 \mathbf{a} 进行内积相乘, 然后相加, 则得

$$\frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{dt} = 0.$$

对于方程(4.67), 相应地得到

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})[f(a) + f(b)].$$

我们以 $w = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ 表示, 于是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = abw.$$

我们来研究 w 对时间的导数。由于(4.67),

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} \right] = \frac{ab \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \frac{d}{dt}(ab)}{a^2 b^2} = 0$$

这样一来, 方程(4.67)就有了初积分

$$w(t) = w_0.$$

可惜, 在 w 偏离给定值时, 就前面我们对它所理解的意义上来

说, 等价性已不复存在。事实上, 在 $w \neq w_0$ 时, 并不清楚: 哪一个矢量偏离初始方向以及向哪一方向偏离。因此, 如果没有补充假定, 就不清楚在这种情况下怎样恢复刚体的位置。

尽管有这一情况存在, 仍然可以建立保持 $w \approx w_0$ 的 w 的稳定控制。此时, 应该注意, 使 w 和模的稳定过程尽可能独立地进行。为了消除上面提到的不确切性, 例如, 可以要求, 在控制过程中, 矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 一定要以同一速度沿最短路线相对地运动。

考虑到上述情况, 我们来着手建立控制规律。如果保持方程 (4.67) 的结构, 模的稳定过程就不会破坏。因此, 假定

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}f(a) + \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_k), \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}f(b) + \mathbf{b} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_k), \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}$ 是修正角速度。当 $\boldsymbol{\omega}_k = 0$ 时, 方程 (4.68) 和 (4.67) 相同。(4.68) 的第一方程同 \mathbf{a} , 而第二方程同 \mathbf{b} 进行内积相乘, 则得

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= af(a), \\ \frac{db}{dt} &= bf(b). \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

同理

$$\frac{dw}{dt} = -2 \frac{(\mathbf{a}\mathbf{b}\boldsymbol{\omega}_k)}{ab},$$

式中 $(\mathbf{a}\mathbf{b}\boldsymbol{\omega}_k)$ 表示矢量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 $\boldsymbol{\omega}_k$ 的混合积。

为使矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的运动沿最短线路进行, 设

$$\boldsymbol{\omega}_k = A(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (4.70)$$

我们取偏差奇函数 $(w - w_0)$, 例如

$$A = \frac{k}{ab} (w - w_0) \quad (4.71)$$

作为比例系数。顾及到 (4.70) 和 (4.71), 经某些变换之后, 我们有:

$$\frac{dw}{dt} = -2k(1 - w^2)(w - w_0). \quad (4.72)$$

方程 (4.68) 具有下列形式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}f(a) + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{k}{ab} [\mathbf{b}a^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] (w - w_0), \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}f(b) + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{k}{ab} [\mathbf{a}b^2 - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] (w - w_0). \end{aligned} \right\} (4.73)$$

显而易见, (4.69) 和 (4.72) 是无关的。

为了证明稳定性, 我们取

$$W = \alpha(a-1)^2 + \beta(b-1)^2 + \gamma(w-w_0)^2, \\ \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

这种形式的里雅普诺夫函数。根据方程 (4.73) 或者与之相同的 (4.69) 和 (4.72), 我们有:

$$\frac{dW}{dt} = 2\alpha a(a-1)f(a) \\ + 2\beta b(b-1)f(b) - 4k\gamma(1-w^2)(w-w_0)^2.$$

既然 $a > 0$ 和 $b > 0$, 所以, 为了稳定, 只要求

$$\begin{aligned} (a-1)f(a) &< 0 \quad a \neq 1, \\ (b-1)f(b) &< 0 \quad b \neq 1, \\ k &> 0, \quad w^2 \neq 1 \end{aligned}$$

就可以了。

对于实用目的来说, 只要在一次近似中按模和按角的控制相互独立就可以了。所以, 方程 (4.73) 可稍加简化。首先, 在表达式的方括弧中, 可假定 $a \approx b \approx 1$ 和 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \approx w_0$ 。于是,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}f(a) + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} - k(w-w_0)(\mathbf{b} - \mathbf{a}w_0), \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}f(b) + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} - k(w-w_0)(\mathbf{a} - \mathbf{b}w_0). \end{aligned} \right\} (4.74)$$

其次, 可将 $(w-w_0)$ 近似地置换成 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - w_0)$, 因此,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}f(a) + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} - k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - w_0)(\mathbf{b} - \mathbf{a}w_0), \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}f(b) + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} - k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - w_0)(\mathbf{a} - \mathbf{b}w_0). \end{aligned} \right\} (4.75)$$

在矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 相互垂直, 即 $w_0 = 0$ 的极其特殊的情况下, 方程 (4.75) 具有比较简单的形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}f(a) + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} - k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}, \\ \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}f(b) + \mathbf{b} \times \boldsymbol{\omega} - k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}. \end{aligned} \right\} (4.76)$$

可以证明, 虽然稳定区域较(4.73)窄些, 简化的控制方案(4.74)~(4.76)仍然是稳定的。

方程(4.73)~(4.76), 例如比(4.36)复杂些。虽然如此, 就这些方程来说仍然可以构成工作能力很强的数值积分法。在可以将具体的物理涵义描述为矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 时, 例如, 在研究刚体相对于两给定恒星的方向的定向问题时, 使用模和角修正的泊松方程十分合适。

第五章 四元数在刚体运动 控制问题中的应用

运动学参数是能够描述刚体角运动的广义坐标。另一方面,运动学参数在刚体运动时姿态角控制问题方面也得到了应用。控制系统中刚体给定姿态的角偏差信号是运动学参数的函数。我们以一般形式研究刚体绕其质心运动的自动控制系统。系统应由确定刚体相对于给定坐标系统的姿态角(方位)并给出角偏差信号的姿态角传感器、根据角偏差信号形成控制信号的函数转换器以及赖以改变刚体姿态角的控制机构组成。所述控制系统构成普通的自动调整闭合回路。宇宙飞行器、飞机、火箭、飞船等等的姿态角控制系统,正是根据这个方框图设计的。

我们研究得到刚体相对给定坐标系统(原始基)的角偏差信号的问题。习惯上都以克雷洛夫角或欧拉角的函数作为这种信号。这是因为,在姿态角的自动控制装置中,首先采用了具有常平架的各种陀螺装置。这种装置能够测量万向节轴的转角,这些角就是欧拉和克雷洛夫角。

控制技术的发展,特别是宇宙技术的发展导致了捷联式姿态角传感器的出现。行星中心、太阳方位光学传感器、恒星方位传感器等都是这一类传感器的例子。这些传感器确定的角误差信号是方向余弦的,而不是欧拉角的函数。当控制系统中使用计算装置并象捷联式控制系统中所做的那样,通过积分运动学方程的方法来测定刚体姿态角时,可用任何运动学参数作为角误差信号。在这种情况下,运动学参数的形式将决定于被积分的运动学方程的类型。

因此,原则上可将各种不同的运动学参数用于控制问题中。在两种情况下使用四元数似乎是最方便的。首先,利用罗德里格-

哈密顿参数进行的定位过程稳定性的研究,能够判断整个系统的稳定性。四元数能够求出实现稳定控制的函数关系的最通用形式。其次,四元数分量可作为控制信号使用,当在控制系统中算出这些参数时,这种情况是可能发生的。以四元数作为控制信号,不仅能够得到刚体角运动的稳定控制,而且在许多情况下都能得到十分接近于最佳的控制(见第六章)。

某一给定基准坐标系 I 中刚体的定位问题,将理解为把同刚体固连的坐标系 E 转换成基准坐标系的问题。我们将研究定位问题的两种提法:运动学问题和动力学问题。

在第一种情况下,我们假定,定位过程在于:修正的绝对角速度加在固连坐标系 E 上,目的是改变基 E 的方位,以使其同坐标系 I 重合。由于角速度 Ω_k 的存在所产生的、基 E 转换为基 I 的过程,将约定称之为修正过程。这种提法将称为定位的运动学问题。实际上,它十分近似于刚体的定位和姿态角控制问题。问题在于,定位控制系统,如宇宙飞行器的方位控制系统是用其角速度值实现调整的,这个角速度值由飞行器与所需姿态的角偏差的函数给定。尽管事实上是通过加控制力矩(由喷气发动机)或者改变内部质量的动力力矩来进行控制的,在控制力矩的加速度相当大的情况下,运动特性却同在定位的运动学问题中将要讨论的情况相近。

在第二种情况下,即在定位的动力学问题中,将假定,不是用修正角速度 Ω_k ,而是用加给刚体的控制力矩 M 进行控制的。控制力矩引起刚体相应运动。此时,定位的目的同样是使固连基同基准基重合。

本章中将研究控制的类型,即保证完成定位过程的函数关系 Ω_k 和 M 的形式。研究控制过程的稳定性;证明,对于某些类型的控制来说,运动学稳定性的条件是动力学稳定性的必要条件。

§5.1 控制信号与运动学参数的关系

得到描述刚体坐标系 E 和基准坐标系 I 的角误差的控制信

号,是求解定位问题的必要条件。实际上,刚体定位控制以某些姿态角传感器的测量为依据,这种测量能确定固连轴相对于空间中某些方向(行星、太阳、恒星、宇宙飞行器等方向)的位置。为了一致起见,我们将认为,姿态角传感器决定基 I 的轴 i_k 的位置,而基 I 是同定位方向固连的。

我们将把两种类型的定位区别开来:基 I 为惯性非旋转坐标系的定位(这种定位称之为惯性定位)以及基 I 进行给定旋转的旋转坐标系定位。在任何情况下,传感器的输出信号都能确定一、二或三个基的角坐标误差。

我们将使传感器敏感轴的方向如此对应每一输出信号,使之绕该轴旋转时仅在基 E 和 I 的重合位置产生这种输出信号。根据一般理由可以看出,对于空间(三轴)定位来说,必须有不少于三个的传感器,其敏感轴不应在一个平面上(应构成空间基)。姿态角传感器的输出信号可用描述基的相互位置的运动学参数的函数表示。

我们研究姿态角传感器输出信号的各种表示方法。

假定,由坐标系 I 到坐标系 E 的转换通过某些运动学参数确定并以通过克雷洛夫角(2.70)或四元数分量(1.19)表示的矩阵 A 表示。显然,此时,一些参数可以通过另一些参数表示。但是,我们将仅仅研究是实际可测量的这一类参数。

当通过万向支架轴的位置对应于所选克雷洛夫角顺序的三自由度陀螺稳定平台(图 5.1)进行定位时,从支架轴测角器上取下的信号将是输出信号。这些信号将直接是克雷洛夫角 ϑ , φ 和 ψ 的函数: $f_1(\vartheta)$, $f_2(\varphi)$, $f_3(\psi)$ 。例如,在使用感应式测角器时,我们将有:

$$f_1(\vartheta) = \sin \vartheta, \quad f_2(\varphi) = \sin \varphi, \quad f_3(\psi) = \sin \psi.$$

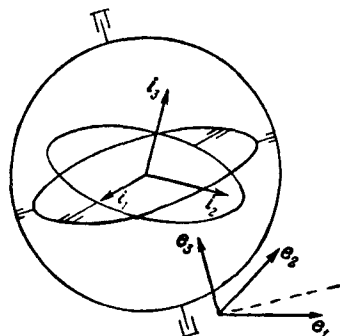


图 5.1

我们注意到, 相应的万向支架轴将是陀螺平台每一输出信号 f_k 的方向, 即敏感轴, 而且, 除了陀螺平台万向支架的两轴位置重合外, 到处都可用陀螺平台进行定位。

我们将把从二自由度陀螺支架中对准装置的形式(图 5.2) 实现的传感器作为另一个例子。支架轴上的测角器的信号可以是这一传感器的输出信号。如果由传感器的坐标系转换为目标轴的角顺序对应于上述顺序(见图 5.1, 在该图中取第三角等于零), 则 θ 和 φ 将是被测角。根据这一点, 这种传感器的敏感轴安置在支架轴上。

可以研究固定在基 E 轴上对准某一方向的传感器, 这个方向可能是行星、太阳、恒星等方向。在这个比较一般的情况下, 这种传感器的输出信号将是对准线同坐标系 E 轴的方向余弦的函数。因此, 如果对准了轴 i_1 而且传感器的视在轴在轴 e_1 上, 则函数

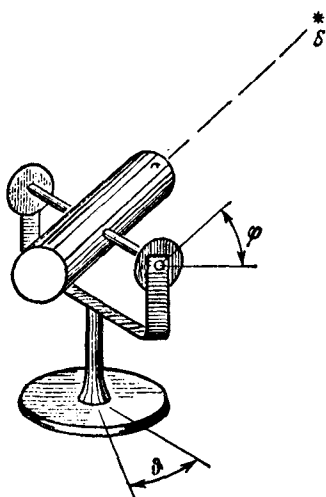


图 5.2

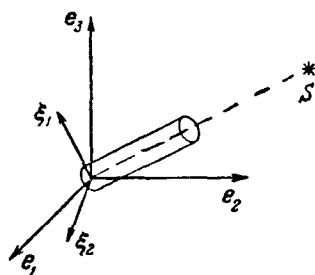


图 5.3

$f_1(e_2 \cdot i_1)$ 和 $f_2(e_3 \cdot i_1)$ 可以是输出信号。显然, 第三个余弦 $e_1 \cdot i_1$ 不给出轴 e_1 偏离 i_1 方向的信息(虽然这个余弦同样是这一偏差的量度)。

传感器相对于坐标轴 E 的位置表征它的两个敏感轴 ξ_1 和 ξ_2 (图 5.3)。当偏离对准方向时, 绕轴 ξ_1 和 ξ_2 旋转便相应地产生信号 f_1 和 f_2 。微转动矢量 θ 确定的基 E 对给定位置的小角度偏

离,可由传感器进行部分测量。传感器的输出信号将依量 $\theta \cdot \xi_1$ 和 $\theta \cdot \xi_2$ 而定,这两个量是敏感轴 ξ_1 和 ξ_2 同角偏差矢量的方向余弦。显然,这种二坐标传感器仅能测量不是绕对准线轴旋转的角偏差分量,而不能提供角偏差的全部信息。只有存在不少于三个的不在一个平面的敏感轴时,才能全部测出矢量 θ 。

对于刚体的三轴定向,必须有两轴,比方说, e_1 和 e_2 偏离基准基的信息。如果使敏感轴位于基 E 各轴上的固定传感器同每一个轴固连,则这个传感器的输出信号将是轴 i_k 和 e_k 之间方向余弦的函数。利用公式(1.19),我们可以写出方向余弦的下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} i_1 \cdot e_2 &= 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3), & i_2 \cdot e_3 &= 2(\lambda_3 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_1), \\ i_1 \cdot e_3 &= 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2), & i_3 \cdot e_1 &= 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2), \\ i_2 \cdot e_1 &= 2(\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2), & i_3 \cdot e_2 &= 2(\lambda_3 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_1). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

当基 E 小偏离基 I 时,仅仅考虑空间旋转角的一阶微量,从(2.70)、(1.19)和(2.1)的比较中便得到:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &\approx e_1 \cdot i_2 \approx -e_2 \cdot i_1 \approx 2\lambda_0 \lambda_3, \\ \varphi &\approx e_2 \cdot i_3 \approx -e_3 \cdot i_2 \approx 2\lambda_0 \lambda_1, \\ \psi &\approx e_3 \cdot i_1 \approx -e_1 \cdot i_3 \approx 2\lambda_0 \lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

这些关系式将小偏差时的各种运动学参数连系起来。实际上,在描述传感器输出信号的函数关系时有意义的正是这些关系式,因为,多数传感器具有小“线性”区的输出特性,在这个区域中,输出信号传递偏差的信息。在其它“工作”区中,传感器通常只传递偏差符号的信息。工作也往往是有界的。根据这一点,传感器的输出特性可用量(5.2)的函数表示。

关系式(5.2)表明,除习惯上使用的角 ϑ 、 φ 和 ψ 之外,还可将量 $\lambda_0 \lambda_i$ 用于控制。下面将给出这一命题的严密论据。在以后的讨论中,根据姿态角传感器输出信号形成的控制信号,将以量(5.1)或(5.2)的函数形式给出。

§ 5.2 惯性坐标系中定位的运动学问题

我们研究刚体在惯性坐标系 I 中定位的运动学问题。假定,

固连基 E 相对基 I 的运动用四元数 $\Lambda(t)$ 描述, 而基 E 旋转的绝对角速度等于 Ω_K , 它是根据姿态角传感器的信号形成的修正速度。

我们研究修正信号同运动学参数的关系各不相同的情况下坐标 E 转换为惯性坐标系 I 的过程, 并求出保证修正系统稳定性的控制要求。基 E 相对基 I 运动的方程是形为(3.11)的运动学方程, 因为修正速度 Ω_K 是通过调整角速度在刚体轴上的投影 Ω_{Ki} ($i=1, 2, 3$) 的控制系统, 在基 E 的轴上给出的。我们将这些方程写成标量形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\Omega_{K1} - \lambda_2\Omega_{K2} - \lambda_3\Omega_{K3}, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\Omega_{K1} + \lambda_2\Omega_{K3} - \lambda_3\Omega_{K2}, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\Omega_{K2} + \lambda_3\Omega_{K1} - \lambda_1\Omega_{K3}, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\Omega_{K3} + \lambda_1\Omega_{K2} - \lambda_2\Omega_{K1}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

我们研究定位稳定性的充分条件和保证这种定位的值 Ω_{Ki} 的函数关系的形式。

I. 我们引入正定函数

$$W = 1 - \lambda_0^2 = \frac{1}{2}[(1 - \lambda_0^2) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2]. \quad (5.4)$$

这个函数, 在刚体定向的位置上, 即基 E 和 I 重合时, 变为零 [同这个位置对应的是四元数 $(1, 0, 0, 0)$]。在基 E 相对基准基 I 的所有其它位置时, 它具有正值。这个函数根据运动方程(5.3)求出的导数, 将等于

$$\dot{W} = -2\lambda_0\dot{\lambda}_0 = \lambda_0\lambda_1\Omega_{K1} + \lambda_0\lambda_2\Omega_{K2} + \lambda_0\lambda_3\Omega_{K3}. \quad (5.5)$$

我们首先研究用四元数分量进行控制, 即控制信号以量 λ_j ($j=1, 2, 3$) 的函数形式形成的情况。当在控制系统中计算出分量 λ_i 时, 这种情况是可能发生的。

关系式(5.2)表明, 在小偏差时, 同相应各角度相同的量 $\lambda_0\lambda_j$ 可作为角偏差的量度。如果考虑到, 两个四元数 $(\Lambda$ 和 $-\Lambda)$ 对应于刚体的同一个位置, 则可看出, 量 $\lambda_0\lambda_j$ 给出了最小空间转弯方向的信号, 这种转弯是小于 π 的。

在线性修正的情况下,角速度的修正值应以下列形式给定:

$$\Omega_{kj} = -k_j \lambda_0 \lambda_j. \quad (5.6)$$

可以看出,当 $k_j > 0$ 时,导数(5.5),除定向的位置外,到处都将是负定的:

$$-\dot{W} = k_1 \lambda_0^2 \lambda_1^2 + k_2 \lambda_0^2 \lambda_2^2 + k_3 \lambda_0^2 \lambda_3^2.$$

因此,函数(5.4)是里雅普诺夫函数,而控制(5.6)保证修正过程在 Λ 变化的整个区域内(点 $\lambda_0 = 0$ 除外,一般说来,同点 $\lambda_0 = 0$ 对应的是位置的某一区域)渐近线收敛于平衡位置,即位置

$$\Lambda = (1, 0, 0, 0).$$

正如从关系式(5.6)所看到的,在 $\lambda_0 = 0$ 时,速度 Ω_{kj} 变为零,导数 \dot{W} 也变为零。这一状态是非稳定的平衡位置。为了确定这一点上的运动特性,我们假定 $k_j = k$, 这时

$$\dot{W} = -k \lambda_0^2 (1 - \lambda_0^2) = -kW(1 - W).$$

积分这一方程,求出

$$W = \frac{W_0 \exp(-kt)}{1 + W_0 [\exp(kt) - 1]},$$

式中 W_0 等于在初始时刻 W 的值。由此可见,收敛速度依赖于修正系数 k , 而对于初始值 $W_0 < 1$ 来说,在 $k > 0$ 时, $W(t)$ 趋向于零。显然,除点 $\lambda_0 = 0$ 外, W 都不能是 1。对于 $W_0 = 1$, 我们有 $W(t) = 1$ 。

假定 $W_0 = 1 - \delta$, 式中 δ 是无穷小量。于是

$$W(t) \approx \frac{1}{1 + \delta \exp(kt)},$$

即奇点 $\lambda_0 = 0$ 是非稳定节点。

按量 $\lambda_0 \lambda_j$ 的控制,在非线性修正函数的情况下,也将是渐近稳定的。

假定控制具有这种形式:

$$\Omega_{kj} = -k_j F_j(\lambda_0) \Phi_j(\lambda_j), \quad (5.7)$$

式中函数 $F_j(x)$ 和 $\Phi_j(x)$ 满足条件

$$xF_j(x) > 0, \quad x\Phi_j(x) > 0, \quad |x| \leq 1. \quad (5.8)$$

下面,我们将说,控制(5.7)属于(5.8)类。在这种控制下,里雅普诺夫函数的导数(5.5),在 $k_j > 0$ 时都将是负定的(它变为零的奇点 $\lambda_0 = 0$ 除外)。由此可见,属于(5.8)类的任何非线性(对四元数分量而言)控制,只要 $\lambda_0 \neq 0$,它都能保证控制过程的渐近稳定性。

对于刚体位置整个区域中的渐近稳定性来说,只要补充确定控制(5.6)和(5.7),使之在 $\lambda_0 = 0$ 的点上它们不变为零就可以了。在这种情况下,尽管里雅普诺夫函数的导数在 $\lambda_0 = 0$ 的点上变为零,但是正如在前面讨论的线性控制(5.6)这个例子中一样,这个位置已经不再是平衡位置(虽然也是非稳定的)。为了证明这一事实,我们叙述一下如下表达的里雅普诺夫定理^[1]:如果存在这样的相坐标的正定函数,它的导数是非正的而且在某一个不含有整轨线的集合上变为零(除平衡位置外),那么,系统的平衡位置是渐近稳定的。

II. 我们讨论按方向余弦控制的情况:我们将研究的控制是方向余弦(5.1)的线性函数。

显然,为了进行三轴定位,只要利用固连基中确定坐标系 **I** 两轴方位的两对余弦就可以了。此时,四个余弦中仅有三个是独立的。

假定利用轴 i_1 和 i_2 的余弦。于是,以余弦(1.5)的线性函数的形式形成三个修正角速度 Ω_{ki} 。考虑到,小偏差时,形成的修正信号,根据(5.2)应该具有(5.6)的形式,使得

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{k1} &= \frac{k_1}{2} (i_2 \cdot e_3) = -k_1 (\lambda_1 \lambda_0 - \lambda_3 \lambda_2), \\ \Omega_{k2} &= -\frac{k_2}{2} (i_1 \cdot e_3) = -k_2 (\lambda_2 \lambda_0 + \lambda_1 \lambda_3), \\ \Omega_{k3} &= -\frac{k_3}{2} (i_2 \cdot e_1) = -k_3 (\lambda_3 \lambda_0 + \lambda_1 \lambda_2), \\ \Omega_{k3} &= \frac{k_3}{2} (i_1 \cdot e_2) = -k_3 (\lambda_3 \lambda_0 - \lambda_1 \lambda_2), \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

就是说,由四个方向余弦形成三个修正信号有两种可能性。我们证明,对于两种情况来说,都可以满足稳定性的充分条件。为了证

明这一点,我们将以下列形式作出里雅普诺夫函数:

$$W = \alpha(1 - \lambda_0^2) + \beta\lambda_3^2 + \gamma\lambda_2^2 + \delta\lambda_1^2, \quad (5.10)$$

式中 α, β, γ 和 δ 是任意正参数。显然, 这个函数是正定函数而且仅在平衡位置变为零。

这一函数根据方程 (5.3) 求出的导数具有下列形式:

$$\begin{aligned} -\dot{W} = & k_1(\alpha + \delta)\lambda_0^2\lambda_1^2 + k_2(\alpha + \gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2 + k_3(\alpha + \beta)\lambda_0^2\lambda_3^2 \\ & + k_1(\beta - \gamma)\lambda_2^2\lambda_3^2 + k_2(\beta - \delta)\lambda_1^2\lambda_3^2 \pm k_3(\delta - \gamma)\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ & + [k_1(\gamma - \beta - \alpha - \delta) + k_2(\alpha + \gamma + \beta - \delta) \\ & + k_3(\delta - \gamma \pm \alpha \pm \beta)]\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \end{aligned} \quad (5.11)$$

式中上面的符号同 (5.9) 式中确定控制 Ω_{k3} 的第三个等式对应。

为使导数 (5.11) 为负函数, 必须满足下列条件:

$$k_i > 0, \quad \beta \geq \gamma, \quad \beta \geq \delta, \quad \pm(\delta - \gamma) \geq 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.12)$$

我们证明, 通过参数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的选择, 在量 λ_i 变化的整个区域内, 都可使函数 \dot{W} 成为定号函数。我们以下列形式表示函数 (5.11):

$$\begin{aligned} -\dot{W} = & k_1(\alpha + \delta)\lambda_0^2\lambda_1^2 + k_1(\beta - \gamma)\lambda_2^2\lambda_3^2 + a\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ & + k_2(\alpha + \gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2 + k_2(\beta - \delta)\lambda_1^2\lambda_3^2 + b\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ & + k_3(\alpha + \beta)\lambda_0^2\lambda_3^2 \pm k_3(\delta - \gamma)\lambda_1^2\lambda_2^2 + c\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \end{aligned} \quad (5.13)$$

式中, a, b, c 服从于条件

$$\begin{aligned} a + b + c = & k_1(\gamma - \beta - \alpha - \delta) \\ & + k_2(\alpha + \gamma + \beta - \delta) + k_3(\delta - \gamma \pm \alpha \pm \beta). \end{aligned} \quad (5.14)$$

我们要求关系式 (5.13) 的三个二次型中的每一个都是定号二次型的。为此, 应该满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &\leq 4k_1^2(\alpha + \delta)(\beta - \gamma) = A^2 > 0, \\ b^2 &\leq 4k_2^2(\alpha + \gamma)(\beta - \delta) = B^2 > 0, \\ c^2 &\leq \pm 4k_3^2(\alpha + \beta)(\delta - \gamma) = C^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

根据必要条件 (5.12), A, B 和 C 是实值。条件 (5.15) 也可以写成这种形式:

● 原书等号左边误为 $-\frac{1}{2}\dot{W}$ 。——校者

$$\left. \begin{aligned} -A &\leq a \leq A, \\ -B &\leq b \leq B, \\ -C &\leq c \leq C. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

对于位在各边为 A 、 B 、 C 的平行六面体内的任何 a 、 b 和 c ，所得不等式都得到满足。如果考虑补充关系 (5.14)，那么，在平面 $d=a+b+c$ 同平行六面体 ABC 相交时，即

$$-(A+B+C) \leq d \leq (A+B+C)$$

时，也只有这时，不等式 (5.16) 才能满足。不等式 $-(A+B+C) \leq d \leq (A+B+C)$ 是通过不等式 (5.16) 求和得到的。根据 (5.14) 和 (5.15) 代换上述不等式中的 A 、 B 、 C 和 a 、 b 、 c ，得到

$$\begin{aligned} &-2k_1\sqrt{(\alpha+\delta)(\beta-\gamma)} - 2k_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)} \\ &-2k_3\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\delta-\gamma)} \leq k_1(\gamma-\beta-\alpha-\delta) \\ &+ k_2(\alpha+\gamma+\beta-\delta) + k_3(\delta-\gamma \pm \alpha \pm \beta) \\ &\leq 2k_1\sqrt{(\alpha+\delta)(\beta-\gamma)} + 2k_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)} \\ &+ 2k_3\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\delta-\gamma)}. \end{aligned}$$

我们来研究得到的表达式。这个表达式可分成下面两个不等式：

$$\left. \begin{aligned} &-k_1\{(\alpha+\delta) + (\beta-\gamma) - 2\sqrt{(\alpha+\delta)(\beta-\gamma)}\} \\ &+ k_2\{(\alpha+\gamma) + (\beta-\delta) + 2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)}\} \\ &\pm k_3\{(\alpha+\beta) \pm (\delta-\gamma) \pm 2\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\delta-\gamma)}\} \geq 0, \\ &k_1\{(\alpha+\delta) + (\beta-\gamma) + 2\sqrt{(\alpha+\delta)(\beta-\gamma)}\} \\ &- k_2\{(\alpha+\gamma) + (\beta-\delta) - 2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\delta)}\} \\ &\mp k_3\{(\alpha+\beta) \pm (\delta-\gamma) \mp 2\sqrt{\pm(\alpha+\beta)(\delta-\gamma)}\} \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

我们假定 $\alpha+\delta=\beta-\gamma$ ，于是， $\alpha+\gamma=\beta-\delta$ 。这个等式同上述稳定性的必要条件 (5.12) 是一致的。于是，(5.17) 中第一个不等式具有如下形式

$$k_2 \geq \mp k_3 \frac{[\sqrt{\alpha+\beta} \pm \sqrt{\pm(\delta-\gamma)}]^2}{\pm(\alpha+\gamma)}, \quad (5.18)$$

而 (5.17) 中第二个不等式变成下式：

$$k_1 \geq \pm k_3 \frac{[\sqrt{\alpha+\beta} \mp \sqrt{\pm(\delta-\gamma)}]^2}{4(\alpha+\delta)}. \quad (5.19)$$

我们研究上面一个符号的情况,这相当于通过(5.9)中第三个等式给定 Ω_{k3} 。对于任何正数 k_2 和 k_3 , 不等式(5.18)始终成立。在不等式(5.19)中,再给参数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 加上一点限制:假定 $\gamma = \alpha + \delta - \beta$ 。于是,这个不等式具有如下形式:

$$k_1 \geq k_3 \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{2(\alpha + \delta)}, \quad \beta \geq \alpha,$$

而且所有的必要条件(5.12)都能得到满足。通过余下的不定参数 α 的选择,总可以使这个不等式成立。

下面一个符号相当于通过(5.9)中第四个等式给定 Ω_{k3} 的情况,同这种情况类似,不等式(5.19)同样成立。假定 $\gamma = \alpha + \delta - \beta$, 不等式(5.18)可变为这种形式:

$$k_2 \geq k_3 \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2(\alpha + \gamma)}, \quad \alpha \geq \beta.$$

显然,通过选择参数 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ 也始终能够使这个不等式成立。由此可见,对于任何系数 k_i , 通过参数 α, β, δ 和 γ 的选择都能使不等式(5.17)成立,这相当于导数(5.11)的符号不变,因而也相当于按方向余弦的控制的渐近稳定性。

在所述证明中,任何地方都没有给定系数 k_i ($i=1, 2, 3$) 的值而且没有利用它是常数的特性。根据“视在线性化”原理, $x \neq 0$ 时满足条件(5.8)的任何非线性控制函数,都可表示成:

$$F_i(x) = k_i(x)x \quad (i=1, 2, 3).$$

由此可见,任何(5.8)类的方向余弦的非线性函数都能保证稳定定位。

同理,也可讨论利用其它两轴(i_2 和 i_3 或者 i_1 和 i_3) 来修正的控制情况。

III. 对于刚体姿态的稳定控制来说,只要有以方向余弦或量 $\lambda_0 \lambda_i$ 的函数形式给定的三个独立修正信号就可以了。我们来确定,稳定定位所需独立信号的最少数目是多少,换句话说,在三个独立控制信号中有无本身就是多余的。为了解决这一问题,我们

研究: 在使用一或两个修正信号的情况下, 坐标系 E 得出什么样的位置。

作为例子, 我们研究按四元数分量(5.6)的控制并假定, 仅仅使用一个修正信号 $k_1 > 0$, 而 $k_2 = k_3 = 0$ (即单通道控制的情况)。在这种情况下, 里雅普诺夫函数的导数(5.5)等于 $-k_1 \lambda_0^2 \lambda_1^2$, 而且当 $\lambda_1 = 0$ 时(不是考虑 $\lambda_0 = 0$ 的位置)它都为零。显然, 这些位置将是控制(修正角速度)消失的平衡位置。同这一情况对应的是基 E 这样的位置, 即将基 I 转换为基 E 的有限转动矢量, 位于平面 $e_2 e_3$ 的位置。运动方程(5.3)的整轨线对应于这些位置中的任何一个位置。

同理, 在使用两个修正信号, 如 $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ 和 $k_3 = 0$ 这样的信号(双通道控制)时, 对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 来说, 我们有等于零的导数(5.5), 当有限转动矢量指向轴 e_3 时, 便发生这一情况。这种位置中的任何一个也都是平衡位置。由此可见, 对于刚体相对于惯性坐标系的定位来说, 必须使用不少于三个的独立修正信号, 即不少于三个的姿态角传感器的独立信号。

§ 5.3 旋转坐标系中定位的运动学问题

除上述惯性定位的情况外, 最常碰到的是旋转坐标系定位。宇宙飞行器所谓的轨道坐标系定位就是这一类例子, 这种坐标系轴的方向同轨道平面和行星中心方向有关。轨道坐标系以等于轨道角速度的角速度 ω_0 进行顺序的旋转。矢量 ω_0 在轨道坐标系中具有确定的方向: 它的方向不变而且位在轨道的次法线上。当进行这样的运动时, 轨道坐标系在惯性空间的一个平面上旋转(轨道平面的进动忽略不计)。

一个宇宙飞船对另一飞船的定位是旋转坐标系中定位的又一个例子。如果研究两飞船的相对运动, 连接它们的矢径则在一固定平面内旋转(在一般情况下)。根据这一点, 可以引进同旋转平面固连的坐标系, 其一轴在矢径上, 而另一轴同旋转平面垂直。在这种情况下, 基准基相对于惯性空间的旋转角速度, 在基准基轴上

具有固定位置。

I. 这样一来,在研究旋转坐标系中定位问题时,我们将假定,通过给基 E 以修正角速度的方法使固连坐标系 E 同基准坐标系 I 重合。此时,坐标系 I 以角速度 ω_0 相对于惯性空间旋转,同时角速度矢量按确定方式位在基 I 上而且不改变自己的方向。我们将认为,矢量 $\omega_0 = \omega_0 i_3$ 指向轴 i_3 ,而这并不失一般性。

我们研究坐标系 E 应该具有什么样的绝对角速度。显然,首先,基 E 的旋转速度应该包括修正角速度 Ω_k , 它是以基 E 和 I 偏差的函数形式通过在固连轴上的投影 Ω_{kj} 给定的。其次,显然应该要求定向的位置为平衡位置。为此,在坐标系 E 和 I 重合的情况下,如果修正角速度矢量变为零,基 E 必须进行同基准基一样的旋转。因此,必须使基 E 具有附加旋转速度 ω^* , 它指向与基准基 (i_3) 相同的轴 (e_3) 并具有同样的值,就是说,应有 $\omega^* = \omega^* e_3 = \omega_0 e_{30}$ 。由此可见,基 E 的绝对角速度

$$\Omega = \Omega_k + \omega^* = \Omega_{k1} e_1 + \Omega_{k2} e_2 + (\Omega_{k3} + \omega_0) e_3. \quad (5.20)$$

假定固连基 E 相对基准基的位置由四元数 $\Lambda(t)$ 给定。我们补充引进惯性基 Z 并分别用四元数 N 和 M 描述基 E 和 I 相对于它的运动。如果从基 Z 到基 I 的转换由四元数 M 给定,而从基 I 到基 E 的转换由四元数 Λ 给定,则由基 Z 到基 E 的转换决定于两四元数之积:

$$N = M \circ \Lambda. \quad (5.21)$$

确定基 I 和 E 相对于惯性基运动的运动学方程,根据 (3.11)、(3.12) 并顾及到 (5.20) 将具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{M} &= \omega_{0Z} \circ M = M \circ \omega_{0I}, \\ 2\dot{N} &= \Omega_Z \circ N = N \circ \Omega_E, \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

式中, ω_{0Z} 、 ω_{0I} 是矢量 ω_0 在基 Z 和 I 上的超复数映像,而 Ω_Z 和 Ω_E 是矢量 Ω (5.20) 在基 Z 和 E 上的映像。

根据 (5.21), 有

$$\Lambda = \tilde{M} \circ N,$$

由此可以得出确定基 E 相对于基 I 运动的运动学方程:

$$\begin{aligned}
 2\dot{\Lambda} &= 2\tilde{\mathbf{M}} \circ \dot{\mathbf{N}} - 2\tilde{\mathbf{M}} \circ \dot{\mathbf{M}} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{N} \\
 &= \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{N} \circ \Omega_E - \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{M} \circ \omega_{0I} \circ \tilde{\mathbf{M}} \circ \mathbf{N} = \Lambda \circ \Omega_E - \omega_{0I} \circ \Lambda. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

我们发现, 这是最方便的方程形式, 因为矢量 Ω 由基 E 上本身的分量给定, 就是说, 事实上给定的是 Ω_E 。完全一样, 在基 I 上也给定矢量 ω_0 , 就是说, 已知的就是量 ω_{0I} 。

如果将矢量 (例如 ω_0) 重新投影到基 E 上, 则得

$$\omega_{0E} = \tilde{\Lambda} \circ \omega_{0I} \circ \Lambda,$$

而对于角速度 $\Omega_E - \omega_{0E}$ (它是基 E 和 I 运动的相对速度) 来说, 方程 (5.23) 具有一般形式 (3.11)。根据 (5.20) 和矢量 ω_0 的定义, 我们有下列映像值:

$$\Omega_E = (\Omega_{K1}, \Omega_{K2}, \Omega_{K3} + \omega_0), \quad \omega_{0I} = (0, 0, \omega_0)。$$

考虑到这一点, 以四元数分量 Λ 表示的运动的运动学方程 (5.23) 可写成下述标量形式:

$$\left. \begin{aligned}
 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1 \Omega_{K1} - \lambda_2 \Omega_{K2} - \lambda_3 \Omega_{K3}, \\
 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0 \Omega_{K1} + \lambda_2 \Omega_{K3} - \lambda_3 \Omega_{K2} + 2\lambda_2 \omega_0, \\
 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0 \Omega_{K2} + \lambda_3 \Omega_{K1} - \lambda_1 \Omega_{K3} - 2\lambda_1 \omega_0, \\
 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0 \Omega_{K3} + \lambda_1 \Omega_{K2} - \lambda_2 \Omega_{K1}.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

所得旋转坐标系定位方程与惯性定位的类似方程 (5.3) 的不同之处在于: 这里有两个带有角速度 ω_0 项。正如看到的一样, 方程 (5.24) 分成两组: 分量 λ_0 和 λ_3 的方程以及 λ_1 和 λ_2 的方程, 前一组方程同方程 (5.3) 相似, 后一组方程与基准基旋转速度 ω_0 存在有关。当假定 ω^* 等于 ω_0 时, 显然可知平衡位置 $\lambda_i = 0, \Omega_{Ki} = 0$ ($i=1, 2, 3$) 是方程的解。可以验证, 在相反的情况下, 在 (5.24) 的第一和第四个方程中, 就会出现含有 $\omega_0 - \omega^*$ 的项。

指出这样一点是有趣的, 即: 对于常量 $\omega_0 - \omega^*$ 和 $\Omega_K = 0$ 来说, 方程 (5.23) 表示可解的 [见 (3.88)] 进动情况:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0(t) &= \lambda_0^0, \quad \lambda_3(t) = \lambda_3^0, \\
 \lambda_1(t) &= \lambda_1^0 \cos \omega_0 t + \lambda_2^0 \sin \omega_0 t, \\
 \lambda_2(t) &= \lambda_2^0 \cos \omega_0 t + \lambda_1^0 \sin \omega_0 t.
 \end{aligned}$$

这个解表明, 在没有修正量时, 坐标系 E 相对于坐标系 I 的

运动是这样的: 有限旋转矢量(给定从坐标系 I 到 E 的转换)沿锥面旋转, 如果在固连轴上观察运动, 则其轴在轴 e_3 上; 从基准基观察时, 则在轴 i_3 上。

II. 我们研究坐标系 E 转换为 I 的过程稳定性的必要和充分条件。我们讨论按四元数分量进行控制的情况。象在前一节一样, 我们引入形为(5.4)的里雅普诺夫函数。根据方程(5.24)求出它的导数, 其形式与惯性定位(5.5)的情况完全一样。由此可立即看出, 线性控制(5.6)和满足条件(5.8)形为(5.7)的任意非线性控制都能实现修正过程的渐近收敛。

在某些情况下, 与惯性定位不同, 基准坐标系的旋转只用两个信号的控制就能将坐标系 E 转换为坐标系 I 。在姿态角传感器没有提供充分信息的情况下, 实现定位的这种可能性是存在旋转时平衡位置发生变化造成的。在基本上没有研究可能有的修正型式和没有证明转换过程稳定性的一系列著作 [42, 45] 中, 都指出了这一事实。

我们研究根据 Ω_{k1} 和 Ω_{k2} ($k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 = 0$) 两信号进行修正的情况。在这种情况下, 里雅普诺夫函数的导数, 除 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 的区域外, 总是负的。应该验明, 集 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 是否含有在给定修正下满足方程(5.24)的整轨线。假定, 方程(5.24)中 $\Omega_{ki} = 0$, 则得到

$$\dot{\lambda}_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_3 = 0, \quad \dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \omega_0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \omega_0. \quad (5.25)$$

显然, 对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 来说, 轨线 $\lambda_0(t) = \lambda_0^0, \lambda_3(t) = \lambda_3^0$ 满足这些方程。由此可见, 在根据 Ω_{k1} 和 Ω_{k2} 两信号[(5.6)或(5.7)型]修正的情况下, 存在有里雅普诺夫函数的导数变为零的整轨线, 就是说, 不能满足渐近稳定性条件, 因此利用这样两个信号进行定位是不可能的。

现在假定, 根据下面一对信号 Ω_{k1} 和 Ω_{k3} ($k_1 > 0, k_3 > 0, k_2 = 0$) 进行修正。我们研究, 在这样修正下, 当任何其它坐标不等于零时, 能否存在使 Ω_{k1} 和 Ω_{k3} 变为零的解。假定 $\Omega_{ki} = 0$, 则得到(5.25)式, 显然, 它只在 $\lambda_2 = 0$ 时才能满足于条件 $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ 。因

此, 集 $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, 除定向位置 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 外, 不包括整轨线。由此可见, 在根据这样两个信号修正时, 进行空间定位是可能的。

类似地, 在根据 Ω_{k2} 和 Ω_{k3} ($k_2 > 0$, $k_3 > 0$, $k_1 = 0$) 两信号修正时, 集 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 除点 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 外, 不包括整轨线, 就是说, 利用这一对信号进行定位也是可能的。

因此, 旋转坐标系定位可根据姿态角传感器的两个信号进行, 此时, (5.6) 或 (5.7) 型控制完全能够保证稳定性 (也和前面一样, 这个控制必须在 $\lambda_0 = 0$ 的点上补充规定, 使它不等于零)。

当仅仅根据一个信号修正时, 存在有其上导数 \dot{W} 等于零的整轨线。因此, 当根据 Ω_{k1} ($k_2 = k_3 = 0$, $k_1 > 0$) 修正时, 对于集 $\lambda_1 = 0$ (Ω_{k1} 变为零的集) 来说, 我们有下列解:

$$\lambda_0(t) = \lambda_0^0, \quad \lambda_3(t) = \lambda_3^0.$$

当根据信号 Ω_{k2} 修正时, 即 $k_1 = k_3 = 0$, $k_2 > 0$ 时也存在有类似的解。当根据信号 Ω_{k3} 修正时, 即在 $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 > 0$ 时, 对于集 $\lambda_3 = 0$ 来说, 我们有满足方程 (5.25) 的轨线:

$$\lambda_1(t) = \lambda_1^0 \cos \omega_0 t + \lambda_2^0 \sin \omega_0 t,$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_2^0 \sin \omega_0 t - \lambda_1^0 \cos \omega_0 t.$$

由此可见, 利用姿态角传感器的一个信号进行稳定定位是不可能的。

III. 根据信号 Ω_{k3} 和 Ω_{k1} (即根据 $\lambda_0 \lambda_3$ 和 $\lambda_0 \lambda_1$) 进行稳定修正的上述情况, 用对线性修正 (5.6) 情况的转换过程的研究来解释是很有意思的。我们立即看到, 用类似的方法, 也可根据信号 Ω_{k3} 和 Ω_{k1} ($\lambda_0 \lambda_3$, $\lambda_0 \lambda_1$) 得出修正的过程。

假定修正系数 k_i 相等并在这样的控制下进行定位:

$$\Omega_{k1} = -k\lambda_0\lambda_1, \quad \Omega_{k3} = -k\lambda_0\lambda_3.$$

在这种情况下, 方程 (5.24) 具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= k\lambda_0(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) = k\lambda_0(1 - \lambda_0^2 - \lambda_2^2), \\ 2\dot{\lambda}_3 &= -k\lambda_0(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2), \\ 2\dot{\lambda}_1 &= -k\lambda_0(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) + 2\omega_0\lambda_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= -2\omega_0\lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

这些方程描述根据两信号修正时变基 \mathbf{E} 为基 \mathbf{I} 的转换过程。这些方程的精确解是没法得到的。因此，对方程 (5.26) 进行近似研究。由 (5.26) 描述的运动可分为被初始条件，亦即量 λ_i 变化范围确定的三个阶段。

1. 假定初始偏差和修正系数 k 是这样的，除了其中 λ_1 和 λ_3 是微量的三个位置外，都满足条件 $\Omega_{ki} \gg \omega_0$ (这个条件等价于要求 $\omega_0 \ll k$)。我们研究下列运动，这种运动近似于 (5.26)，同它相差 ω_0 的微量项，该项根据所做的假定可忽略不计：

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= k\lambda_0(1 - \lambda_0^2 - \lambda_2^2), \\ 2\dot{\lambda}_3 &= -k\lambda_0(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2), \\ 2\dot{\lambda}_1 &= -k\lambda_0(\lambda_1\lambda_0 + \lambda_2\lambda_3), \\ 2\dot{\lambda}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

求这些方程的积分。考虑到 $\lambda_2 = \lambda_2^0$ (λ_i^0 是四元数分量的初始值)，由 (5.27) 的第一个方程得到

$$\lambda_0^2(t) = \frac{(\lambda_0^0)^2 [1 - (\lambda_2^0)^2]}{(\lambda_0^0)^2 \{1 - \exp[-k[1 - (\lambda_2^0)^2]t]\} + [1 - (\lambda_2^0)^2] \exp[-k[1 - (\lambda_2^0)^2]t]}.$$

所得解足以用来分析运动的特性了。因为 $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = 1 - \lambda_2^2 - \lambda_0^2$ ，所以

$$\begin{aligned} \lambda_1^2(t) + \lambda_3^2(t) &= [(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_3^0)^2] \\ &\times \frac{[1 - (\lambda_2^0)^2] \exp\{-k[1 - (\lambda_2^0)^2]t\}}{[1 - (\lambda_2^0)^2] \exp\{-k[1 - (\lambda_2^0)^2]t\} + (\lambda_0^0)^2 \{1 - \exp[-k[1 - (\lambda_2^0)^2]t]\}} \\ &= [(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_3^0)^2] \left\{ 1 + \frac{(\lambda_0^0)^2}{1 - (\lambda_2^0)^2} [\exp(k[1 - (\lambda_2^0)^2]t) - 1] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

由这一等式可以看出，当 t 值足够大时，有

$$\frac{\lambda_1^2(t) + \lambda_3^2(t)}{(\lambda_1^0)^2 + (\lambda_3^0)^2} \approx \frac{1 - (\lambda_2^0)^2}{(\lambda_2^0)^2} \exp\{-k[1 - (\lambda_2^0)^2]t\}, \quad (5.28)$$

就是说，过程的收敛是相当快的并为修正系数 k 和初始条件 $\lambda_2^0 < 1$ 的选择所决定。

显然，关系式 (5.28) 描述变轴 \mathbf{e}_2 为轴 \mathbf{i}_2 的转换过程。我们注意到， λ_2^0 近似于 1 意味着， λ_0^0 是微量而且刚体的位置接近于点

$\lambda_0^0 = 0$ 。这种情况应该特别地加以研究。

如果将四元数分量写成

$$\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad \lambda_i = \gamma_i \sin \frac{\vartheta}{2} \quad (i=1, 2, 3)$$

(式中 γ_i 是有限转动矢量的方向余弦), 则从关系式 $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 \rightarrow 0$ 可以看出, $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 \rightarrow 0$, 因此 $\gamma_2^2 \rightarrow 1$ 。这说明, 在轴 e_2 变为轴 i_2 的转换过程中, 转角 $\vartheta(t)$ (平面旋转欧拉角) 由初始值 ϑ_0 开始减小, 于是

$$\sin \frac{\vartheta(t)}{2} \rightarrow \sin \frac{\vartheta_0}{2} \gamma_2^0,$$

式中, γ_2^0 是有限转动矢量相应的余弦的初始值。在这种状态下, 坐标系 E 已从定向的位置绕轴 e_2 转了一角度 $\vartheta(t)$ 。将轴 e_2 转到同轴 i_2 重合的第一个快速阶段, 至此结束。

2. 当继续运动时, 轴 e_2 和 i_2 变得靠近, 就是说, 运动将是坐标系 E 绕轴 i_2 的旋转, 其结果应该使坐标系 E 和 I 重合, 就是说, $\vartheta(t)$ 应该减小到零。绕轴 $e_2(i_2)$ 的旋转是运动的第二阶段, 为了近似地研究这一阶段的运动, 假定方程 (5.26)● 中导数 $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_3 = 0$, 因为 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_3(t)$ 由于修正而变成了微量, 这个值也是它们在以后全部运动期间所要保持的。从这一条件可以推出, 近似等式是成立的:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_3 &\approx \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_0}, \quad \lambda_1 \lambda_0 + \lambda_3 \lambda_2 \approx -\frac{2\omega_0 \lambda_2}{k \lambda_0}, \\ \lambda_1 &= \frac{2\omega_0 \lambda_2}{k(\lambda_0^2 + \lambda_2^2)} \approx \frac{2\omega_0}{k} \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

因为 λ_2 和 λ_3 是微量, 其平方可以忽略不计。将所得之值 λ_1 代入 (5.26)● 的第四个方程, 则得

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{2\omega_0^2}{k} \lambda_2,$$

由此可以得出解

$$\lambda_2(t) = \lambda_2^0 \exp\left(-\frac{2\omega_0^2}{k} t\right), \quad (5.30)$$

它是描述基 E 绕轴 i_2 向定向位置转变的（在这里， λ_2^0 是运动第二阶段的初始值，也就是第一阶段的终点值，它等于 $\gamma_2^0 \sin \frac{\vartheta}{2}$ ）。

指出这样一点是有趣的，即修正系数 k 的值在这里对过程的收敛速度起相反的作用：随着系数 k 的增大而减小（在运动的第一阶段，轴的旋转速度随着系数 k 的增大而增大）。

我们提出修正加速度的下列方法：由于速度 ω_0 的存在，坐标 λ_1 和 λ_2 是“固连的”，而在所述情况下，修正是根据信号 $\lambda_1 (\Omega_{k2} = k\lambda_0\lambda_1)$ 进行的，所以可以下列形式引入所谓交叉修正：

$$\Omega_{k2} = -h\lambda_0\lambda_1. \quad (5.31)$$

暂且不谈轴 e_2 同轴 i_2 重合阶段（这种重合是可以实现的）修正过程收敛性的研究问题，我们只探讨绕轴 e_2 的旋转，即沿坐标 λ_2 的运动。在对于 $\dot{\lambda}_1 = \dot{\lambda}_3 = 0$ 所选修正的情况下，考虑到一阶微量 λ_1 和 λ_3 ，由(5.24)的第二和第四个方程得到形式上类似于(5.29)的分量 λ_1 的关系式。考虑到这一点，(5.24)的第三个方程具有下列形式：

$$2\dot{\lambda}_2 = - (h\lambda_0^2 + 2\omega_0)\lambda_1 = - \frac{2h(\lambda_0^2 + 2\omega_0)\omega_0}{k} \lambda_2.$$

注意到 $\lambda_0^2 \approx 1 - \lambda_2^2$ ，便得到所求方程的下列解：

$$\lambda_2(t) = \lambda_2^0 \frac{\exp\left[-\frac{(h+2\omega_0)\omega_0}{k} t\right]}{\sqrt{1 - \frac{h}{h+2\omega_0}(\lambda_2^0)^2 \left[\exp\left(-\frac{2\omega_0(h+2\omega_0)}{k} t\right) - 1\right]}}. \quad (5.32)$$

由此可见，引入交叉修正可以大大加速过程的收敛性。

3. 在分量 $\lambda_2(t)$ 变成微量之后，近似解(5.28)、(5.30)和(5.32)便失去意义。 λ_2 和 λ_3 这两个值很小时，平衡位置近傍的第三阶段，即最后一阶段的运动，由线性化方程(5.26)来描述，在这些方程中不考虑关于 λ_1 , λ_2 , λ_3 ($\lambda_0 \approx 1$) 的二阶微量项：

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_3 &= -k\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= -k\lambda_1 + 2\omega_0\lambda_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= -2\omega_0\lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

分析转换过程的精度时可使用这些方程。方程(5.33)表明, 通道 λ_3 与通道 λ_1 和 λ_2 无关, 而 λ_1 、 λ_2 两通道由于旋转速度 ω_0 的存在是彼此关连的。(5.33)中第二和第三个方程构成的方程组的特征方程将是

$$p^2 + \frac{k}{2} p + \omega_0^2 = 0,$$

并具有根

$$p_{1,2} = -\frac{k}{4} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16} - \omega_0^2}.$$

在 ω_0 很小(同 k 比较)时, 收敛过程的时间很长。为使过程加速, 可引入交叉修正(5.31)。在这种情况下, 第三个方程变成下列形式:

$$2\dot{\lambda}_2 = -h\lambda_1 - 2\omega_0\lambda_1.$$

特征方程具有这种形式:

$$p^2 + \frac{k}{2} p + \omega_0 \left(\omega_0 + \frac{h}{2} \right) = 0$$

并具有根

$$p_{1,2} = -\frac{k}{4} \pm \sqrt{\frac{k^2}{16} - \omega_0 \left(\omega_0 + \frac{h}{2} \right)}.$$

由此可见, 通过交叉修正系数 h 的选择可以提高收敛速度。

最后, 我们研究坐标系在奇点 $\lambda_2^0 \approx 1$ 的状态, 正象从解(5.28)看到的, 在这一点上不应有过程的收敛性。同 $\lambda_2^0 = 1$ 对应的是这样的位置, 即坐标系 E 和 I 的轴 e_2 和 i_2 重合, 而轴 e_1 和 e_3 同轴 $-i_1$ 和 $-i_3$ 重合, 就是说, 坐标系 E 和 I 转动了 180° 。我们注意到, 精确的运动方程(5.26)容许有特解 $\lambda_2 = 1$, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_3 = 0$, 而所述位置是平衡位置。在这个位置上, 修正信号 Ω_{x1} 和 Ω_{x3} 变为零。如果补充确定了这一点的控制, 不使之消失, 则这样的位置, 根据方程(5.24)已将不是平衡位置。

为了在这一点近傍进行研究, 假定方程(5.24)中 $\lambda_2 \approx 1$ 并将认为 λ_0 、 λ_1 和 λ_3 是微量。在这种情况下, 我们得到下列方程组(我们联想到 $\Omega_{x2} = 0$):

$$\begin{aligned}
2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\Omega_{K1} - \lambda_3\Omega_{K3}, \\
2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\Omega_{K1} + \Omega_{K3} + 2\omega_0, \\
2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_3\Omega_{K1} - \lambda_1\Omega_{K3} - 2\lambda_1\omega_0, \\
2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\Omega_{K3} - \Omega_{K1}.
\end{aligned}$$

从这些方程中可以看出, 尽管 λ_0 、 λ_1 、 λ_3 是无穷小量, 但沿坐标运动的速度 λ_3 和 λ_1 , 基本上, 分别决定于修正速度 Ω_{K1} 和 Ω_{K3} 。当修正速度以 (5.6) 的形式给定并在 $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_3 = 0$ 这样的点上变为零时, 在这点的小邻域中的运动由近似方程描述:

$$\left. \begin{aligned}
2\dot{\lambda}_0 &= 0, \\
2\dot{\lambda}_3 &= k\lambda_0\lambda_1, \\
2\dot{\lambda}_1 &= -k\lambda_0\lambda_3 + 2\omega_0, \\
2\dot{\lambda}_2 &= -2\omega_0\lambda_1,
\end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

考虑到关于 λ_0 、 λ_1 、 λ_3 的三阶微量项, 由 (5.26) 便得到这些方程。

可以看出, 方程 (5.34) 描述保守系统的运动, 就是说, 量 λ_i 按谐波规律变化, 其频率为

$$\nu^2 = \frac{k^2(\lambda_0^0)^2}{4},$$

式中, λ_0^0 是坐标 λ_0 的初始值。但是, 不是在所有的情况下 λ_i 在运动过程中是微量。因为轨线对 $\lambda_2 = 1$ 这一点的偏差, 在很大程度上由坐标 $\lambda_2(t)$ 的变化表征出来, 所以, 我们对这一坐标作出方程 (5.34) 的解:

$$\begin{aligned}
\lambda_2(t) &= \lambda_2^0 \frac{\frac{k^2(\lambda_0^0)^2}{4} + \omega_0^2 \cos \nu t}{\nu^2} \\
&\quad + \lambda_3^0 \frac{\omega_0 k \lambda_0^0}{2\nu^2} (1 - \cos \nu t) - \lambda_1^0 \frac{\omega_0}{\nu} \sin \nu t.
\end{aligned}$$

这个解表明, 只有在 $\frac{k^2(\lambda_0^0)^2}{4} \gg \omega_0^2$ 时坐标 $\lambda_2(t)$ 才接近于 1, 即使在小系数的情况下, 旋转角速度 ω_0 的存在也会使系统较快的偏离这一点。

IV. 我们研究控制修正信号以方向余弦函数的形式给定的

控制稳定性问题。我们将在下列条件下求(5.10)型里雅普诺夫函数,即根据轴 i_1 和 i_2 的方向余弦进行控制而且这种控制具有(5.9)的形式。根据运动方程(5.24)求出的里雅普诺夫函数的导数,在给定制下将等于

$$\begin{aligned} -\dot{W} \bullet = & k_1(\alpha+\delta)\lambda_0^2\lambda_1^2 + k_1(\beta-\gamma)\lambda_2^2\lambda_3^2 + k_2(\alpha+\gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2 \\ & + k_2(\beta-\delta)\lambda_1^2\lambda_3^2 + k_3(\alpha+\beta)\lambda_0^2\lambda_3^2 \pm k_3(\delta-\gamma)\lambda_1^2\lambda_2^2 \\ & + k_1[(\gamma-\alpha-\beta-\delta) + k_2(\alpha+\beta+\gamma-\delta) \\ & \pm k_3(\delta-\gamma+\alpha+\beta)]\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 2\omega_0(\delta-\gamma)\lambda_1\lambda_2. \quad (5.35) \end{aligned}$$

我们假定 $\delta=\gamma$ 并要求所得二次形式的符号不变。为此,首先必须使条件

$$k_i > 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad \beta \geq \gamma \quad (\beta \geq \delta)$$

成立。我们引入符号

$$a = a + b = (k_2 - k_1 \pm k_3)(\alpha + \beta) \quad (5.36)$$

并以这样的形式表示导数(5.35):

$$\begin{aligned} -\dot{W} \bullet = & [k_1(\alpha+\delta)\lambda_0^2\lambda_1^2 + k_1(\beta-\gamma)\lambda_2^2\lambda_3^2 + a\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3] \\ & + [k_2(\alpha+\gamma)\lambda_0^2\lambda_2^2 + k_2(\beta-\delta)\lambda_1^2\lambda_3^2 + b\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3] \\ & + k_3(\alpha+\beta)\lambda_0^2\lambda_3^2. \end{aligned}$$

在所列表式中两个二次形式(在两个方括号内的)为定号的条件将是:

$$4k_1^2(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma) \geq a^2, \quad 4k_2^2(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma) \geq b^2.$$

这些条件也可写成这样的形式:

$$\begin{aligned} -2k_1\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)} & \leq a \leq 2k_1\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}, \\ -2k_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)} & \leq b \leq 2k_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}. \end{aligned}$$

这些不等式在参数 a, b 平面上的直线(5.36)同边为

$$k_1\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)} \quad \text{和} \quad k_2\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}$$

的矩形相交时,也只有这时才能成立,当

$$-2(k_1+k_2)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)} \leq d \leq 2(k_1+k_2)\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}$$

● 原书等号左边误为 $-\frac{1}{2}\dot{W}$ 。——校者

时,也只有这时,才能出现这种情况。所得不等式可分成两个不等式:

$$\left. \begin{aligned} k_2(\sqrt{\alpha+\gamma} + \sqrt{\beta-\gamma})^2 - k_1(\sqrt{\alpha+\gamma} - \sqrt{\beta-\gamma})^2 \\ \pm k_3(\alpha+\beta) \geq 0, \\ k_1(\sqrt{\alpha+\gamma} + \sqrt{\beta-\gamma})^2 - k_2(\sqrt{\alpha+\gamma} - \sqrt{\beta-\gamma})^2 \\ \mp k_3(\alpha+\beta) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

为了满足不等式(5.37),我们假定

$$\alpha + \gamma = \beta - \gamma.$$

我们研究上面一个符号表示的情况。(5.37)的第一个不等式始终可以得到满足,第二个不等式简化为下式:

$$k_1 \geq k_3 \frac{\alpha + \beta}{4(\alpha + \gamma)} = \frac{k_3}{2}. \quad (5.38)$$

就下面一个符号来说,(5.37)的第二个不等式总是成立的,第一个不等式简化为

$$k_2 \geq k_3 \frac{\alpha + \beta}{4(\alpha + \gamma)} = \frac{k_3}{2}. \quad (5.39)$$

显然,所述不等式可通过修正系数的选择予以满足,就是说,里雅普诺夫函数的导数(5.35)将是负定的,而修正过程是渐近稳定的。

正象从所述证明中看到的,基准坐标系 I 旋转的存在会导致这样的结果,即出现参数 α 、 β 、 γ 和 δ 的补充条件,借助于它得出条件(5.38)和(5.39)。同情况(5.38)对应的是控制中使用轴 i_2 的两个方向余弦这样的修正,因此,这一情况决定轴 e_2 同轴 i_2 的重合过程。同样的条件(5.39)决定轴 e_1 同 i_1 的重合过程。在两种情况下,第三通道都使用(5.9)中第三个方向余弦确定的信号。

从所述证明中可立即看出,当控制中使用轴 i_2 的两个方向余弦时,修正系数 k_2 的值可以假定等于零。此时,除同轴 e_2 和 i_2 重合对应的位置外,在任何地方里雅普诺夫函数及其导数为定号的全部条件都保持不变。但是,正象前面证明了的,这些位置不是运动方程(5.24)的整轨线,由此可见,当根据一个轴 i_2 的方向余弦

修正时,在旋转坐标系中三轴定位是可行的。同理,条件(5.39)的研究证明,当根据轴 i_1 的方向余弦修正时,将坐标系 E 转换为基准坐标系是可能的。

为了阐明加在修正系数(5.38)和(5.39)上的限制的特性,我们研究修正信号是方向余弦的非线性函数的这种情况。我们将研究根据在固连轴中按轴 i_2 的两个信号(方向余弦)修正的情况:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{k1} &= -\Omega_1 \operatorname{sign}(\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3), \\ \Omega_{k3} &= -\Omega_3 \operatorname{sign}(\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2), \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

就是说,我们将研究开关控制函数的情况。

我们选择轴 i_2 和轴 e_2 的方向余弦确定的函数作为里雅普诺夫函数:

$$W = \frac{1}{2} [1 - (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)] = \lambda_1^2 + \lambda_3^2.$$

在修正函数(5.40)的情况下,基于方程(5.24),其导数

$$-\dot{W} = \Omega_1 |\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3| + \Omega_3 |\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2| + 2\omega_0 \lambda_1 \lambda_2.$$

我们研究所得表达式变为零或者为负的区域,即不旋转运动的区域。显然,为此,这些不等式必须成立:

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon_1 \lambda_1 \lambda_2 &\geq |\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3| \\ -\varepsilon_3 \lambda_1 \lambda_2 &\geq |\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2| \end{aligned} \right\} \quad \lambda_1 \lambda_2 \leq 0 \text{ 时},$$

式中

$$\varepsilon_1 = \frac{2\omega_0}{\Omega_1} > 0, \quad \varepsilon_3 = \frac{2\omega_0}{\Omega_3} > 0.$$

求不等式的平方,则得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 &\geq \lambda_0^2 \lambda_1^2 - 2\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, \\ \varepsilon_3^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 &\geq \lambda_0^2 \lambda_3^2 + 2\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1^2 \lambda_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

要使里雅普诺夫函数的导数为正的区域存在,必须满足这两个不等式。反之,如果证明,即使有一个不等式在整个运动范围内不成立,这个导数则将是负定函数。我们将第二个不等式看成是关于 $\lambda_0 \lambda_3$ 的二次三项式:

$$(\lambda_0 \lambda_3)^2 + 2(\lambda_0 \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_2) + (1 - \varepsilon_3^2)(\lambda_1 \lambda_2)^2 \leq 0, \quad (5.42)$$

它的根是

$$(\lambda_0 \lambda_3)_{1,2} = (-\lambda_1 \lambda_2) \pm \varepsilon_3 (\lambda_1 \lambda_2) = -(1 \mp \varepsilon_3) (\lambda_1 \lambda_2)。$$

由于 $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$, 在 $\varepsilon_3 < 1$ 的条件下, 不等式(5.42)在下列区间内得到满足:

$$(\lambda_0 \lambda_3)_1 \leq \lambda_0 \lambda_3 \leq (\lambda_0 \lambda_3)_2$$

或者, 根据二次方程(5.42),

$$(-\lambda_1 \lambda_2)(1 - \varepsilon_3) \leq \lambda_0 \lambda_3 \leq (-\lambda_1 \lambda_2)(1 + \varepsilon_3)。$$

为了估计值 $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, 我们将这个不等式乘以 $(-\lambda_1 \lambda_2)$:

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 (1 - \varepsilon_3) \leq -\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \leq \lambda_1^2 \lambda_2^2 (1 + \varepsilon_3)。$$

由此可见

$$-\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \nu \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad (5.43)$$

式中, $1 - \varepsilon_3 \leq \nu \leq 1 + \varepsilon_3$ 。

将所得估值代入(5.41)的第二个不等式, 则有

$$(2\nu - \varepsilon_1^2) \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_0^2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \leq 0。 \quad (5.44)$$

显然, 由于关系式(5.43), 因子

$$2\nu - \varepsilon_1^2 \geq 2(1 - \varepsilon_3) - \varepsilon_1^2 \quad (5.45)$$

通过 ε_1 和 ε_3 的选择总可以变为正。此时, 严格的不等式(5.44)不能得到满足。等式(5.44)仅在下列情况下才可能成立:

- a) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$;
- b) $\lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0$;
- c) $\lambda_2 = 0, \lambda_0 = 0$ 。

对于这些情况中的第一种来说, 所选里雅普诺夫函数的导数

$$-\dot{W} = \Omega_3 |\lambda_0 \lambda_3|$$

仅在 $\lambda_3 = 0$ 或 $\lambda_0 = 0$ 时变为零。完全一样, 在第二和第三种情况下, 里雅普诺夫函数的导数在集 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ 和集 $\lambda_0 = 0, \lambda_2 = 0$ 或 $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_3 = 0$ 中变为零。

因此证明了, 里雅普诺夫函数的导数总是负的, 只是在这样两个位置除外: 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 这个位置对应于业已进行的所需定位; 2) $\lambda_0 = 0$ 以及其它分量中的一个也等于零, 正象前面提到的, 这是不稳定的平衡位置。我们注意到, 后者可由这样一个事实得出, 即: 导数

$$(\lambda_0^2 + \lambda_2^2)' = -(\lambda_1^2 + \lambda_3^2)' \geq 0,$$

就是说, 对于情况 1) 的所述分量来说, 它是正定的。

指出加在 ε_1 和 ε_3 上的限制的意义是有趣的: 必须满足条件 $\varepsilon_1 < 1$ 和 $\varepsilon_3 < 1$ 以及一些更强的条件(5.45)。因此, 修正速度 Ω_1 、 Ω_3 的值至少应比旋转速度 ω_0 大两倍, 不难看出, 这是轴 e_2 转换为轴 i_2 的必要条件。

V. 本节中研究的旋转坐标系定位问题, 属于原始基 I 绕其一轴 (在给定的情况下绕轴 i_3) 旋转的情况。旋转坐标系定位的重要特点是: 本节中证明的在姿态角传感器的信息不完全时进行定位的可能性。这是下列情况引起的: 旋转的存在使可能的平衡位置发生重大的变化。

现在研究基准基 I 中刚体定位的情况, 这个基如此进行旋转, 致使角速度矢量 ω_0 在基 I 上具有任意位置。

在实际中, 这种情况, 比方说, 对应于相对轨道坐标系转动任意角度(程序角)的坐标系中的定位。在这种情况下, 基准坐标系以同样的轨道角速度 ω_0 旋转, 但是, 这个角速度在基 I 上可能具有任意给定方向。

我们将认为, 矢量 ω_0 由基 I 上的三个投影给定, 就是说,

$$\omega_0 = \omega_{0I} = \omega_1 i_1 + \omega_2 i_2 + \omega_3 i_3. \quad (5.46)$$

刚体的坐标系 E , 通过给定修正角速度 Ω_K 以及附加速度 ω^* 同基准坐标系重合。这时, 附加速度 ω^* 应该是这样的, 即坐标系 E 和 I 重合时, 速度 ω^* 同 ω_0 相等, 就是说, 定位位置是平衡位置。修正角速度 Ω_K 和 ω^* 在固连坐标系中以分量给定:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_K &= \Omega_{KE} = \Omega_{K1} e_1 + \Omega_{K2} e_2 + \Omega_{K3} e_3, \\ \omega^* &= \omega_E^* = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

这些速度的矢量和决定基 E 运动的绝对角速度。当根据 (5.46) 确定 ω_{0I} 和由关系式 (5.47) 得到 $\Omega_E = \Omega_{KE} + \omega_E^*$ 的情况下, 方程 (5.23) 将是基 E 和 I 相对运动的方程。

我们将确定四元数 Λ 的分量变化的这些方程写成标量形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\Omega_{K1} - \lambda_2\Omega_{K2} - \lambda_3\Omega_{K3}, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\Omega_{K1} - \lambda_3(\Omega_{K2} + 2\omega_2) + \lambda_2(\Omega_{K3} + 2\omega_3), \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_2\Omega_{K2} - \lambda_1(\Omega_{K3} + 2\omega_3) + \lambda_3(\Omega_{K1} + 2\omega_1), \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\Omega_{K3} - \lambda_2(\Omega_{K1} + 2\omega_1) + \lambda_1(\Omega_{K2} + 2\omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

由于修正过程结束而产生的平衡位置, 将由方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= 0, \\ \dot{\lambda}_1 &= \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ \dot{\lambda}_3 &= \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

描述, 这些方程是在 $\Omega_{Ki}=0$ 时由 (5.48) 得到的。 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 为常数的方程 (5.49) 具有下列解, 这些解是描述进动旋转的:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0(t) &= \lambda_0^0, \\ \lambda_1(t) &= \lambda_1^0 \frac{\omega_1^2 + (\omega_2^2 + \omega_3^2) \cos \omega t}{\omega^2} \\ &\quad + \lambda_2^0 \left[\frac{\omega_3}{\omega} \sin \omega t + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \right] \\ &\quad - \lambda_3^0 \left[\frac{\omega_1\omega_3}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{\omega_2}{\omega} \sin \omega t \right], \\ \lambda_2(t) &= \lambda_1^0 \left[\frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) - \frac{\omega_3}{\omega} \sin \omega t \right] \\ &\quad + \lambda_2^0 \frac{\omega_2^2 + (\omega_1^2 + \omega_3^2) \cos \omega t}{\omega^2} \\ &\quad + \lambda_3^0 \left[\frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{\omega_2\omega_3}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \right], \\ \lambda_3(t) &= \lambda_1^0 \left[\frac{\omega_1\omega_3}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{\omega_2}{\omega} \sin \omega t \right] \\ &\quad + \lambda_2^0 \left[\frac{\omega_3\omega_2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) - \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t \right] \\ &\quad + \lambda_3^0 \frac{\omega_3^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cos \omega t}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

式中, $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ 。显然, 定位位置 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 是方程组 (5.48) 的平衡位置。

为了研究进行定位的可能性, 我们将以 (5.4) 的形式求里雅普

诺夫函数。于是, 根据方程(5.48)求出的它的导数, 将具有(5.5)的形式。由此可立即看出, 按线性型四元数分量的控制(5.6)以及满足条件(5.8)的任意非线性控制(5.7), 可以保证修正过程的渐近收敛。

我们研究传感器信息不完全的情况下进行定位的可能性问题。我们暂且不提实现这样情况的可能性问题: 因为姿态角传感器同对准方向固连, 所以, 不是在它处于任何位置时都可能得到角偏差信号。例如, 在轨道定位的情况下, 传感器同行星方向固连而且只要它的对准轴在相对行星方向给定的区域内, 它就可以工作。现在我们抽象地假定, 在基准基处于任何位置时都可能得到角偏差信号。我们研究两种情况: ① 旋转角速度的全部分量都不等于零; ② ω_0 的两分量不等于零(一个分量不等于零的情况前面已有所研究)。

1) $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0, \omega_3 \neq 0$ 。在这种情况下, 仅仅根据姿态角传感器任何一个信号进行定位, 原则上是可能的。实际上, 假定存在有仅仅根据一个通道, 例如 Ω_{k1} 进行的修正。在这种情况下, 里雅普诺夫函数的导数(5.5), 除集 $\lambda_1 = 0$ 外, 到处都是负的(我们假定, 在 $\lambda_0 = 0$ 这样一点上预定控制, 使它不变为零)。

解(5.50)证明, 仅有一个平衡位置 $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = 0$, 即定向的位置才能有 $\lambda_1 = 0$ 。这些解也说明这样定位的物理意义: 如果要测量 $\lambda_1(t)$ 这个量, 那么, 只要在不同时刻测量三次并根据测得结果确定出 λ_1^0, λ_2^0 和 λ_3^0 就可以了(不过同时测出 λ_1, λ_2 和 λ_3 三个量也可确定这些值)。

实际上, 实现这一情况是不可能的, 因为这种定位情况用的姿态角传感器是不存在的。例如, 在轨道定位的情况下, 同所述情况对应的是基准基 I 相对于轨道轴的程序位置。此时, 事实上没有什么对应于基准基的方向, 就是说, 它们不指向与轨道固连的行星, 因此不可能产生控制信号。

2) $\omega_1 = 0, \omega_2 \neq 0, \omega_3 \neq 0$ 。毫无疑问, 方程是对称的, 而其它分量等于零的情况可归结为这种情况。在这种情况下, 如果仅利

用通道 Ω_{k2} 或 Ω_{k3} 的姿态角传感器的一个信号, 进行定位则是可能的。根据这一点, 可按任何一对信号进行定位, 而仅有一个信号 Ω_{k1} 时, 定位就不可能了。

为了证明, 我们转到里雅普诺夫函数的导数(5.5)上来, 这个导数, 除了所用控制信号确定的某一集外, 到处都将是负定的。例如, 在根据信号 Ω_{k2} 修正时, 必须检验, 集 $\lambda_2 \equiv 0$ 是否包括整轨线。在 $\omega_1 = 0$ 时, 从关系式(5.50)可以看出, 当 $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = 0$ 时, 也只有这时 $\lambda_2 \equiv 0$ 才是可能的。由此可见, 根据信号 Ω_{k2} 修正时出现稳定定位过程。根据信号 Ω_{k3} 修正时也会发生同样的情况。但是, 根据信号 Ω_{k1} 修正时, 集 $\lambda_1 \equiv 0$, 根据解(5.50), 除定向的位置外, 还包括这样的解:

$$\lambda_2^0 \omega_3 - \lambda_3^0 \omega_2 = 0。$$

由此可见, 尽管 $\lambda_1(t) \equiv 0$, 仍然可取 $\lambda_2(t) \neq 0$ 和 $\lambda_3(t) \neq 0$ 这样的不等于零的 λ_2^0 和 λ_3^0 。

实际上定位有可能符合这种情况, 例如, 若在水平面的平面上进行转动, 则坐标系 I 相对于轨道轴作程序转动的定位就是这样的。在这种情况下, 轨道旋转的角速度 ω_0 投影到基 I 的两轴上。另一方面, 因为基的一轴同行星方向固连, 所以, 有可能测量固连基 E 相对于基准基的偏差。根据已经证明了的, 在这种情况下, 利用姿态角传感器的一个信号(即俯仰或倾斜通道的信号, 而不是航向通道的信号)进行定位是可能的。此种情况下所引用的过程的分析研究是复杂的而且只能在定位位置的小偏差区域内进行。

§ 5.4 定位的动力学问题

运动学稳定性条件, 对于动力学稳定性也是必要的条件。特别地, 动力学稳定性的附加条件是: 当控制同“运动学”控制函数的关系确定时, 控制中存在着含有角速度的阻尼项。

我们研究根据线性规律作出控制函数的动力学控制之例。假定刚体的运动由欧拉动力学方程描述

$$\left. \begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= M_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= M_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= M_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

式中, J_1, J_2, J_3 是刚体的主中心惯性矩; M_1, M_2, M_3 是外加 (加给刚体的) 控制力矩。

方程 (5.51) 同运动学方程, 如 (5.3) 一起, 对于惯性定位的情况来说, 可充分描述受控物体的运动。控制力矩 $M_i (i=1, 2, 3)$ 应以刚体的角速度 ω_i 以及确定定位偏差的运动学参数的函数形式给出。

我们研究以 (5.6) 的形式给出运动学控制的情况。我们给出这样的线性函数的控制:

$$M_i = -h_i \omega_i - k_i \lambda_0 \lambda_i. \quad (5.52)$$

为了研究这种控制的稳定性, 我们将求如下形式的里雅普诺夫函数:

$$T = V + W,$$

式中, W 是“运动学”函数 (5.4), 而项 V 决定于刚体运动的“动力学”, 即

$$V = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2), \quad (5.53)$$

并等于其运动的动能。显然, 函数 T 是正定的, 而且在相对于惯性基定向的位置上为零:

$$\omega_i \equiv 0, \lambda_i \equiv 0, \lambda_0 = 1 \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.54)$$

这个函数基于方程 (5.51) 和 (5.3) 而求出的导数

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i \dot{\omega}_i + \sum_{i=1}^3 \lambda_0 \lambda_i \dot{\omega}_i.$$

代入控制 (5.52), 则得

$$\dot{T} = - \sum_{i=1}^3 h_i J_i \omega_i^2 - \sum_{i=0}^3 \lambda_0 \lambda_i \omega_i (k_i - J_i).$$

在最简单的情况下, 可以假定 $k_i = J_i$ 并得到负定函数 \dot{T} , 这个函数只在所需定位的位置上变为零。由此可见, 控制 (5.52) 可保证定位的实现。

刚体定位可在更一般的控制函数作用下进行。特别地, 我们研究如下形式的控制:

$$M_i = -F_i(\omega_i - \Omega_{ki}) \quad (i=1, 2, 3), \quad (5.55)$$

式中函数 F_i 属于(5.8)类, 而控制函数的自变数是刚体运动角速度和根据姿态角传感器的信号形成的“运动学”修正速度之差。

我们研究刚体旋转动能的表达式(5.53)。在控制(5.55)的情况下, 根据方程(5.51)求出的导数

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 J_i \omega_i F_i(\omega_i - \Omega_{ki}).$$

显然, 这个函数在 $|\omega_i| > |\Omega_{ki}|$ 的情况下总是负的, 而在 $|\omega_i| < |\Omega_{ki}|$ 的情况下是正的。由此可见, 控制(5.55)在角速度较大时将刚体的动能减小到同

$$\omega_i \equiv \Omega_{ki}$$

对应的数值, 而在速度较小时则增大动能。

因此, 控制(5.55)力求将运动变成角速度为 Ω_{ki} 的旋转。在充分的刚性控制下, 这种运动实际上可能同所述定位情况相符。然而, 控制(5.55)不总能将过程渐近收敛为零。函数形式决定系统在零点的状态特性。例如, 非线性控制函数会使系统在定向的位置附近产生自振。

刚体在各种控制规律下运动情况的研究是一个独立而且十分广泛的研究领域, 但我们只限于所述之例。

§ 5.5 例

我们将假定, 刚体运动的控制是利用姿态角信号如此形成的, 以保证平稳位置上的稳定定位。此时, 控制可以前面各节中所述形式中的一种形式给定。这样一个事实是重要的, 即: 对于某一给定坐标系的定位来说, 作为姿态角信号使用的是: 已知的变给定坐标系为固连坐标系变换的四元数的分量值。下面, 我们将把这种四元数称作偏差四元数。

我们研究不同坐标系的不同定位情况, 在不同坐标下, 偏差四

元数可以不同的方法确定。利用无万向支架系统的原理确立惯性控制系是这一问题的重要应用。

I. 假定基准惯性坐标系的位置借助于运动学方程的积分确定。此时, 利用刚性安置在固连轴上的角速度传感器来测量角速度。假定, 角速度传感器的敏感轴安置在固连基 E 的轴上, 而这并不失一般性。在这种情况下, 传感器测量角速度矢量的分量 ω_E , 而积分时利用运动学方程(3.11)。

假定积分从 t_0 时刻开始, 而且用四元数 $(1, 0, 0, 0)$ 作为初始四元数。在这种情况下, 由于积分而得到的四元数 $\Lambda(t)$, 将描述在初始条件下 $I=E(t_0)$ 下基 E 相对于惯性基 I 的运动。显然, 如果利用 $\Lambda(t)$ 作为形成角控制信号的偏差四元数[类似于(5.6)], 则在这种控制下将这样来进行定位, 使刚体轴同对应的原始基 $I=E(t_0)$ 的轴重合。相似的控制系统的方框图示于图 5.4, 它表示了自动控制回路的闭合线路。以后在研究类似的方框图时, 我们将不再画出闭合控制回路, 假定它总是存在的(即, 我们将不画出“控制形成”和“控制对象”的环节)。我们的任务在于得到偏差四元数, 这是给定坐标系定位的必要条件。

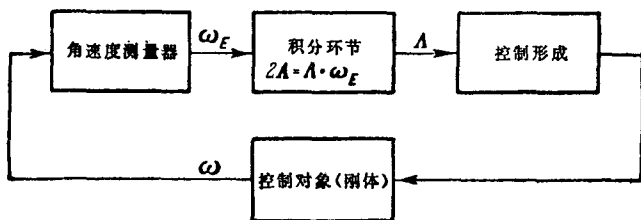


图 5.4

现在我们研究的问题, 不是基 $I=E(t_0)$, 而是以 E_n 表示的其它惯性基的定位问题。假定变基 I 为基 E_n 的转换决定于四元数 Λ_n (图 5.5)。在这种情况下, 必须用给定基 E 相对于基 E_n 的位置的四元数, 即四元数 Λ_p 进行控制。显然, 下列关系式成立:

$$\Lambda = \Lambda_n \circ \Lambda_p,$$

由此

$$\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda_0 \quad (5.56)$$

当根据四元数 Λ_p (5.56) 控制时, 基 E 将同给定基 E_n 重合。

其它方法也可能进行对基 E_n 的定位。显然, 积分开始时若以四元数 $\tilde{\Lambda}_n$ 作为初始条件, 则由于积分而得到的四元数, 根据定理 3.1, 将是四元数 (5.56), 就是说, 四元数 Λ_p 也将满足于可实现的运动学方程。由此可见, 在使用这种方法时便得到关于基 E_n 的定位。

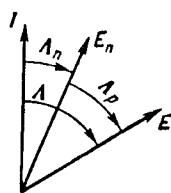


图 5.5

继而, 假定实现了关于基 $I = E(t_0)$ 的定位而且在某一时刻 t 要求实现转为基 E_n 的定位。

为了实现这种转换, 代之四元数 $\Lambda(t)$, 必须用四元数 $\Lambda_p(t)$ (5.56) 来控制。控制四元数的这种转换导致目标必要的重新定位。因此, 运动学方程进行积分的控制系统能够得到关于任何惯性基的定位, 而且通过进行补充的乘法运算 (5.56) 和利用其结果作为偏差四元数来实现变一基为另一基的转换。这种定位的方框图示于图 5.6。



图 5.6

变基 I 定位为其它基 E 的转换也可通过其它方法进行。假定在转换时刻 t_1 由运动学方程积分而得到的四元数等于 $\Lambda(t_1)$ 。显而易见, 在方程积分时, 从 t_1 时刻起, 为了进行基 $I = E(t_0)$ 定位, 必须取 $\Lambda(t_1)$ 为初始条件。如果定位是相对基 E_n 进行的, 在基 $E(t_1)$ 的同一位置时, t_1 时刻的四元数之值则为 $\Lambda_p(t_1) = \tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda(t_1)$ (见图 5.5)。由此可见, 为使相对基 I 的定位转换为基 E_n 定位, 在这一时刻必须在积分环节中由 $\Lambda(t_1)$ 转换为 $\tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda(t_1)$ 。此时, 可以使用图 5.4 示出的方框图。

II. 我们研究相对于旋转坐标系定位的问题。在图 5.7 中示

出了基 I 和固连基 E 相对于它旋转的惯性基 Z 。显然,同上述情况相似,对于基 I 定位来说,必须以下列形式组成偏差四元数:

$$\Lambda_p = \tilde{M} \circ \Lambda. \quad (5.57)$$

四元数 $\Lambda(t)$ 是根据角速度 ω_E 的测量,在初始条件相应给定的情况下求运动学方程积分而得到的。四元数 M 可根据

基 I 旋转角速度 ω_0 得出(如果对于任何时刻来说,事先它是未知的),其方法是在适当选择初始条件的情况下求运动学方程的积分。此时,可以选用任何形式的运动学方程[(3.11)或(3.12)],选择方程的依据是,用哪一个基以最简单的方法把 ω_0 表示出来。这种形式定位的方框图示于图 5.8。

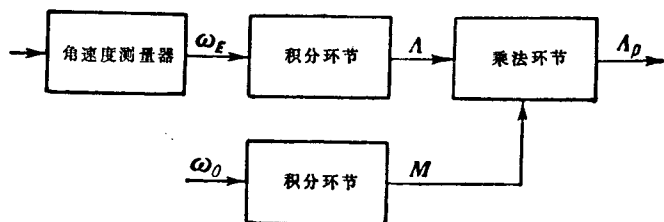


图 5.8

这种定位也可用其它方法得出。我们注意到,所需四元数 Λ_p 满足运动学方程[见方程(5.23)]

$$2\dot{\Lambda}_p = \Lambda_p \circ \omega_E - \omega_{0I} \circ \Lambda_p, \quad (5.58)$$

考虑到

$$2\dot{M} = \omega_{0Z} \circ M = M \circ \omega_{0I},$$

由(5.57)便得到这一方程。

矢量 ω_E (以 ω 在固连轴上的投影为分量)是可测量的角速度矢量。此外,固定基 I 的旋转矢量 ω_0 可以在这个基的(而不是基 E 的)轴上的投影给出。因此,可规定有实现方程(5.58)的积分环节。在这种情况下,带有上述环节的方框图(见图 5.4)就可以

是旋转基定位的方框图。应该指出,在某些场合下,较为合适的方框图就是图 5.8 所示出的方框图,因为在这种情况下,两坐标系 I 和 Z 的位置一直保持不变并有可能进行其中任一坐标的定位。

除了直接地进行基 I 定位外,所述方框图还能进行基 E_n 定位,这个基具有以四元数 Λ_n 表征的相对于固定的给定(程序)位置。假定基 Z 、 I 、 E_n 和 E 的相互位置,决定于四元数 \tilde{M} 、 Λ_n 、 Λ_p 和 Λ (如图 5.9 所示)。显然易见,对于相对于基 E_n 的定位来说,应该使用四元数

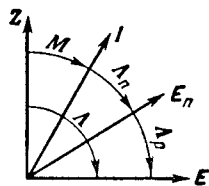


图 5.9

$$\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_n \circ \tilde{M} \circ \Lambda \quad (5.59)$$

进行控制。在方框图(见图 5.8)中再补充一个进行四元数 $\tilde{\Lambda}_n$ 同四元数 $\tilde{M} \circ \Lambda$ 相乘的乘法环节,这样的方框图可以作为这种定位的方框图。

因为四元数 Λ_p (5.59) 满足(当 $\tilde{\Lambda}_n$ 为常量时)方程(5.58),所以在利用实现方程(5.58)的积分环节时,在图 5.4 的方框图中也可得到这种类型的定位。对于在 t_1 时刻变基 I 定位为基 E_n 定位的转换来说,积分器中必须进行初始条件的替换:代之积分所得四元数 $\Lambda_p(t_1)$,应该写成 $\tilde{\Lambda}_n \circ \Lambda_p(t_1)$ 。此时,正象从关系式(5.57)和(5.58)所看到的,将得到所需要的偏差四元数(5.59)。

III. 在研究旋转基定位的实现方法时,曾认为,运动学方程积分而得到的四元数 $\Lambda(t)$ 和 $\tilde{M}(t)$ 或者四元数 $\Lambda_p(t)$ 具有适当选择的初始条件,这些条件可保证基 I (和 Z) 所要求的定位。但实际上,这种情况不是总能出现的而且进行定位的基 I 也不同所需基 I_0 重合(由于初始条件的偏离和误差)。

我们假定,确定基 E 相对于基 I_0 定位的姿态角传感器同控制对象,即基 E 固连。我们将认为,传感器可测量确定变基 I_0 为基 E (图 5.10) 这种转换的四元数分量 $N(t)$,而这并不失一般性。假定基 I_0 和 I 的偏差决定于四元数 P 。显然,可以根据已知四元数 Λ_p 和 N 来确定 P :

$$\mathbf{P} = \mathbf{N} \circ \tilde{\Lambda}_p. \quad (5.60)$$

基 \mathbf{I} 相对于惯性基 \mathbf{Z} 的运动, 由四元数 \mathbf{M} 给定并以角速度 ω^* 进行运动。基 \mathbf{I}_0 相对于基 \mathbf{Z} 的运动, 以角速度 ω_0 进行并由四元数 \mathbf{M}_0 给定。此时, 研究基 \mathbf{I} 和 \mathbf{I}_0 的相互运动问题同 § 5.3 所述在旋转坐标系中的定位问题完全相同。事实上, 对于四元数 \mathbf{P} 来说, 根据图 5.10 我们有

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{M}}_0 \circ \mathbf{M},$$

由此得出相对运动方程

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{P}} &= -2\tilde{\mathbf{M}}_0 \circ \dot{\mathbf{M}}_0 \circ \tilde{\mathbf{M}}_0 \circ \mathbf{M} + 2\tilde{\mathbf{M}}_0 \circ \dot{\mathbf{M}} \\ &= -\omega_{0I} \circ \mathbf{P} + \mathbf{P} \circ \omega_{0I}^*, \end{aligned} \quad (5.61)$$

式中, 根据上述条件,

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\mathbf{M}}_0 &= \omega_{0Z} \circ \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0 \circ \omega_{0I}, \\ 2\dot{\mathbf{M}} &= \omega_{0Z}^* \circ \mathbf{M} = \mathbf{M} \circ \omega_{0I}^* \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

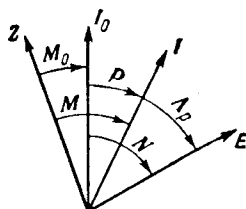


图 5.10

为了把基 \mathbf{I} 转换成基 \mathbf{I}_0 , 必须引入基 \mathbf{I} 运动的附加修正角速度 Ω_k , 就是说, 基 \mathbf{I} 的全角速度应该等于

$$\Omega_k + \omega_{0I}^*.$$

在这种情况下, 方程(5.61)转换成修正坐标系方程:

$$2\dot{\mathbf{P}} = -\omega_{0I_0} \circ \mathbf{P} + \mathbf{P} \circ (\omega_{0I}^* + \Omega_{kI}), \quad (5.63)$$

这个方程类似于方程(5.23)。根据这一点, 确定基 \mathbf{I} 相对于惯性基 \mathbf{Z} 旋转运动的(5.62)的第二个方程, 变成这样的方程:

$$2\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \circ (\omega_{0I}^* + \Omega_{kI}). \quad (5.64)$$

为了解决基 \mathbf{I} 的修正问题也应该实现这个方程。为形成修正信号可以利用现有的(计算出的)四元数(5.60), 此时, § 5.3 中所研究

的各种修正方法,都能保证由基 I 转换为基 I_0 的稳定过程。修正基 I 位置的这种控制过程的方框图示于图 5.11。正象由图看到的,这个方框图具有两个控制回路:刚体姿态的控制回路和将基 I 转换成所需位置的修正回路。

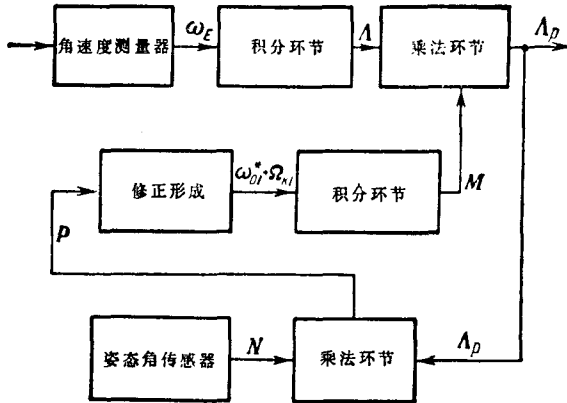


图 5.11

最后,我们发现,姿态角传感器不一定要具有四元数 N 分量的函数的线性特性以及测量基 E 在任何位置的 N 。事实上,在控制回路工作时,偏差量 $\tilde{\Lambda}_p$ 将是微小的。当基 I 对基 I_0 的偏差较小时,四元数 P 也将接近于 1。对于小偏差来说,公式(5.60)转换为小偏差角矢量的矢量相加形式。可以证明,对于修正来说,容许利用姿态角传感器输出信号相当广泛的一类函数关系。但是,这个问题的研究相当复杂并具有特殊性质。

这里列举的确立控制系统的方框图,例如在宇宙飞行器绕行星飞行时,可用于轨道坐标系中宇宙飞行器的定位。

IV. 在大多数惯性定位的实际问题中,不要求惯性基 I 的任意位置,而要求一定的,例如同恒星坐标系(赤道、黄道等等)固连的位置。我们用 I_0 表示坐标系的这一需要位置。显然,为使基 I 同基 I_0 重合,必须在基 E 同基 I_0 重合的时刻起就在积分环节中开始运动学方程的积分(见图 5.4)。

但是, 还有基 I 和 I_0 重合的另一种可能, 当运动学方程积分时, 亦即不能将基 I 置于 I_0 时, 由于基 I 的偏离, 这种可能则成为必要。假定在基 E 中安装有恒星传感器, 这种传感器能确定基 E 相对于基 I_0 的位置。由于这些传感器的型式没有具体化, 所以将认为, 测量的是四元数 N 的分量 (图 5.12)。

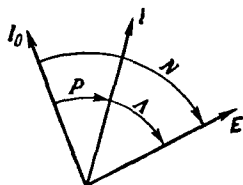


图 5.12

因为四元数之值 $\Lambda(t)$ 是在积分环节中计算得到的而且又是已知的, 所以, 有可能按关系式 (5.60) 计算出表征基 I 和 I_0 偏差的四元数 P 。由于基 I 和 I_0 是惯性基, 因而四元数 P 为常数。我们引入修正角速度 Ω_K , 我们将把这一速度和在积分环节输入端的速度 ω_E 相加, 而 Ω_K 将以四元数 P 的函数形式给出。

基 E 相对于基 I_0 的运动, 以同样的角速度 ω_E (基 E 运动的绝对角速度) 进行, 因此, 我们有 N 变化的下列方程:

$$2\dot{N} = \omega_{I_0} \circ N = N \circ \omega_E.$$

考虑到修正, 在积分环节中实现的方程, 将是这样的:

$$\begin{aligned} 2\dot{\Lambda}_P &= (\omega_I + \Omega_{KI}) \circ \Lambda_P = \Lambda_P \circ (\omega_E + \Omega_{KE}) \\ &= \Lambda_P \circ \omega_E + \Omega_{KI} \circ \Lambda_P. \end{aligned} \quad (5.65)$$

由此, 根据 (5.60) 得到描述基 I 相对于基 I_0 运动的下列方程:

$$\begin{aligned} 2\dot{P} &= 2\dot{N} \circ \tilde{\Lambda}_P - 2N \circ \tilde{\Lambda}_P \circ \dot{\Lambda}_P \circ \tilde{\Lambda}_P \\ &= \omega_{I_0} \circ P - P \circ (\omega_I + \Omega_{KI}) \\ &= -P \circ \Omega_{KI} \end{aligned} \quad (5.66)$$

(因为 $\omega_{I_0} \circ P = P \circ \omega_I$)。方程 (5.66) 表明, 基 I 位置的修正过程与 § 5.2 中所述惯性坐标系定位情况完全相同。

被修正系统 I 定位的方框图示于图 5.13。这种情况下的积分环节应实现形为 (5.65) 的方程。系统也包括有基准基的定位回路和修正回路。我们注意到, 根据恒星传感器信号形成修正角速度的量是个特殊问题。这一问题的复杂性在于, 恒星传感器具有有界输出的特性, 它们的输出信号表征了由对准恒星的位置所确

定的任意轴中的角偏差矢量。在传感器的信息不足和多余的情况下都可进行修正。这个问题也需要进行专门的研究。

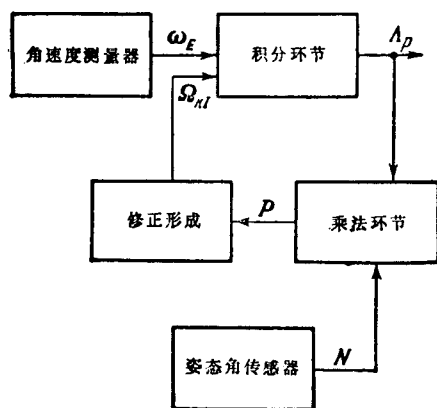


图 5.13

这里所探讨的例子表明，按照利用运动学方程积分和四元数乘法两个标准算法的方框图进行各种型式的定位，是可以实现的。

第六章 刚体的最佳空间转弯

刚体的最佳空间转弯问题, 在研究宇宙飞行器的控制问题时获得了实际应用。当前, 有许多阐述这一问题的著作, 在这些著作中, 解决了某些个别情况。属于这类情况的有: 绕一刚体惯性主轴平面转弯的最佳化以及快速旋转刚体在空间中转弯控制的最佳化^[18, 50, 61]。

最佳转弯问题, 据我们的意见, 是理论力学最复杂的问题之一。公式化了的最佳控制理论, 在一般情况下, 或者导致变系数线性微分方程, 或者导致以一般形式得不到解的非线性方程。尤其是, 以相坐标和速度函数来建立空间转弯最佳控制的问题, 即最佳控制的综合问题还远没有完成。

本章中研究刚体空间转弯的快速作用最佳化问题。在前四节中研究所谓运动学转弯问题, 这时, 刚体角速度的分量值是控制参数。这个问题已经完全得到解决; 此时可证明, 四元数控制是近似最佳控制。这一事实使按偏差四元数分量建立控制具有很大的优点。

在最后两节中研究了两种提法的动力学最佳转弯问题, 一个是快速作用最佳的转弯, 另一个是转弯所用燃料消耗量最佳的转弯。给出了控制球对称刚体这种特殊情况下所述问题的解。

§ 6.1 运动学最佳转弯问题的提出

当刚体运动的角速度值为控制函数时, 所谓刚体空间转弯的运动学问题, 我们将理解为刚体运动的控制问题。在这种情况下, 角速度分量为控制函数的运动方程, 将是受控对象(即刚体)的运动方程。显然, 这样提出问题没有考虑如下事实, 即: 刚体的运动, 实际上由欧拉动力学方程(5.51)描述并以作用于刚体的力矩作为

控制函数(刚体的动力学转弯问题恰恰是这样提出的)。虽然如此,空间转弯的运动学问题仍有实际意义。实际上,刚体(如宇宙飞行器)空间定位的控制系统是这样建立的,即始终由刚体角速度的三个分量(投影)进行控制。

我们将研究由固连基 E 确定的刚体的位置。基 E 相对于基准基 I 的运动,我们将以四元数 Λ 给出,这个运动以运动方程(3.11)来描述,我们将这一方程写成四元数和坐标形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= \Lambda \circ \omega_E, \\ 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

式中, $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 是基 E 相对于基 I 运动的角速度在基 E 轴上投影的分量。

量 ω_i 在该问题中是控制函数。我们将假定, 函数 $\omega_i(t)$ 的集是有界的。我们用符号 Ξ_E 来表示这一集并认为它是闭集:

$$\omega_i(t) \in \Xi_E. \quad (6.2)$$

我们将研究区间 $[t_0, T]$ 的运动, 此时, 以四元数 Λ_0 给定刚体的初始位置, 以四元 Λ_T 给定其终端位置, 就是说, 我们有运动的下列边界条件:

$$\Lambda(t_0) = \Lambda_0, \quad \Lambda(T) = \Lambda_T. \quad (6.3)$$

寻求以最短的时间将初始位置转到终端位置的控制函数 $\omega_i(t)$ 。方程(6.1)同条件(6.2)和(6.3)一起, 完全确定了空间转弯的运动学问题。

我们来研究运动方程(3.12)。显然, 这种形式的方程应用比较有限, 因为它反映了以角速度在原始基准基上投影的分量作为控制函数时刚体运动的控制过程。所研究的第二种运动学方程的形式很有理论意义。

我们将运动方程(3.12)写成四元数和坐标形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\Lambda} &= \omega_I \circ \Lambda, \\ 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\Omega_1 - \lambda_2\Omega_2 - \lambda_3\Omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\Omega_1 + \lambda_3\Omega_2 - \lambda_2\Omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\Omega_2 + \lambda_1\Omega_3 - \lambda_3\Omega_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\Omega_3 + \lambda_2\Omega_1 - \lambda_1\Omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

式中, $\Omega_i (i=1, 2, 3)$ 是基 E 相对于基 I 运动的角速度在基 I 轴上投影的分量。

我们将认为控制是有界的, 即

$$\Omega_i \in \Xi_I, \quad (6.5)$$

而且认为集 Ξ_I 不同于集 (6.2)。条件 (6.3) 将是这一情况下运动的边界条件。

我们转到快速作用最佳控制必要条件的表述上, 为此, 我们使用庞特里雅金最大值原理的公式^[6, 41]。

我们引入对应于完全决定着运动的相变量 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的辅助函数 $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ 。对于运动方程 (6.1), 我们组成哈密顿函数

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E = \langle \dot{\lambda} \psi \rangle &= -\frac{1}{2} \psi_0 (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3) \\ &+ \frac{1}{2} \psi_1 (\lambda_0 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3 \omega_2) + \frac{1}{2} \psi_2 (\lambda_0 \omega_2 + \lambda_3 \omega_1 - \lambda_1 \omega_3) \\ &+ \frac{1}{2} \psi_3 (\lambda_0 \omega_3 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1). \end{aligned} \quad (6.6)$$

函数 $\psi_i (i=0, 1, 2, 3)$ 应该满足所谓共轭方程组

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}_E}{\partial \lambda_i}. \quad (6.7)$$

根据 (6.6), 该方程具有这样的形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\psi}_0 &= -\psi_1 \omega_1 - \psi_2 \omega_2 - \psi_3 \omega_3, \\ 2\dot{\psi}_1 &= \psi_0 \omega_1 + \psi_2 \omega_3 - \psi_3 \omega_2, \\ 2\dot{\psi}_2 &= \psi_0 \omega_2 + \psi_3 \omega_1 - \psi_1 \omega_3, \\ 2\dot{\psi}_3 &= \psi_0 \omega_3 + \psi_1 \omega_2 - \psi_2 \omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

为了确定控制, 我们有四个标量运动方程 (6.1), 四个方程

(6.8)和三个最大值条件,这些条件是,当最佳控制时,函数 \mathcal{H}_E (6.6)在集 Ξ_E (6.2)上达到最大值。

$$\left. \mathcal{H}_E[\lambda_i(t), \psi_i(t), \omega_k(t)] = \max_{\omega_k \in \Xi_k} [\mathcal{H}_E[\psi_i(t), \lambda_i(t), \omega_k(t)]] \right\} (6.9)$$

$$(i=0, 1, 2, 3; \quad k=1, 2, 3)。$$

就八个微分方程(6.1)和(6.8)来说,我们有八个边界条件(6.3)。因此,解 $\lambda_i(t)$ 、 $\psi_i(t)$ 和控制函数 $\omega_k(t)$ 应能单值地确定。但是,条件(6.9)以量 ψ_i 和 λ_i 的函数形式来确定控制参数 ω_k , 而方程(6.1)和(6.8)是线性方程,函数 ω_k 是它的变系数。由此可见,这些方程不能直接求解(因为变系数线性微分方程没有通解,故在此种情况下,运动学方程没有通解)。

对于最佳运动学转弯问题的第二种表示形式,即对于方程(6.4)来说,得到下列哈密顿函数(仍用 ψ_i 表示它的辅助函数):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I = \langle \dot{\lambda} \psi \rangle = & -\frac{1}{2} \psi_0 (\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \lambda_3 \Omega_3) \\ & + \frac{1}{2} \psi_1 (\lambda_0 \Omega_1 + \lambda_3 \Omega_2 - \lambda_2 \Omega_3) + \frac{1}{2} \psi_2 (\lambda_0 \Omega_2 + \lambda_1 \Omega_3 - \lambda_3 \Omega_1) \\ & + \frac{1}{2} \psi_3 (\lambda_0 \Omega_3 + \lambda_2 \Omega_1 - \lambda_1 \Omega_2)。 \end{aligned} \quad (6.10)$$

这种情况下的共轭方程组(6.7)具有下列形式:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\psi}_0 &= -\psi_1 \Omega_1 - \psi_2 \Omega_2 - \psi_3 \Omega_3, \\ 2\dot{\psi}_1 &= \psi_0 \Omega_1 + \psi_3 \Omega_2 - \psi_2 \Omega_3, \\ 2\dot{\psi}_2 &= \psi_0 \Omega_2 + \psi_1 \Omega_3 - \psi_3 \Omega_1, \\ 2\dot{\psi}_3 &= \psi_0 \Omega_3 + \psi_2 \Omega_1 - \psi_1 \Omega_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

控制 $\Omega_k (k=1, 2, 3)$ 将是最佳的,如果在此种控制下哈密顿函数 \mathcal{H}_I 达到最大值,即

$$\mathcal{H}_I[\lambda_i(t), \psi_i(t), \Omega_k(t)] = \max_{\Omega_k \in \Xi_k} \mathcal{H}_I[\lambda_i(t), \psi_i(t), \Omega_k(t)]。 \quad (6.12)$$

在边界条件(6.3)下,最大值条件(6.12)同方程(6.4)和(6.11)一起足以确定最佳控制和相应的运动。但在这里我们有与前一种情况下相同的困难:找不到任意函数 $\Omega_k(t)$ 的运动方程的直接解法。

§ 6.2 运动学最佳转弯问题的解

能够得到运动学最佳转弯问题的解是由于, 辅助变量 ψ_i 的共轭方程组(6.8)和(6.11)分别同运动方程(6.1)和(6.4)相等●。从(6.8)不难看出, 共轭方程组可写成四元数方程(3.11)的形式

$$2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega_E, \quad (6.13)$$

式中, $\Psi = \psi_0 + \psi_1 i_1 + \psi_2 i_2 + \psi_3 i_3$ 是辅助函数所确定的四元数。

根据定理(3.1)可以确信, 因为方程(6.8)和(6.11)是同一角速度 ω_E 的运动方程, 所以, 函数 $\Psi(t)$ 和 $\Lambda(t)$ 的不同点应在于常数

$$\Psi = C_E \circ \Lambda, \quad (6.14)$$

式中, C_E 是常值四元数。不难检验, 实际上(6.14)式是成立的。为此, 我们来研究四元数

$$C_E = \Psi \circ \tilde{\Lambda},$$

并求它的导数

$$\begin{aligned} 2\dot{C}_E &= 2\dot{\Psi} \circ \tilde{\Lambda} - 2\Psi \circ \tilde{\Lambda} \circ \dot{\tilde{\Lambda}} \circ \tilde{\Lambda} \\ &= \Psi \circ \omega_E \circ \tilde{\Lambda} - \Psi \circ \tilde{\Lambda} \circ \Lambda \circ \omega_E \circ \tilde{\Lambda} = 0, \end{aligned}$$

它实际上变为零。

现在, 我们来研究哈密顿函数 \mathcal{H}_E (6.6), 在分出控制函数的各项之后, 我们将其表成下列形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_E &= \frac{1}{2} \omega_1 (\psi_1 \lambda_0 - \psi_0 \lambda_1 + \psi_2 \lambda_3 - \psi_3 \lambda_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega_2 (\psi_2 \lambda_0 - \psi_0 \lambda_2 + \psi_3 \lambda_1 - \psi_1 \lambda_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega_3 (\psi_3 \lambda_0 - \psi_0 \lambda_3 + \psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1). \end{aligned}$$

我们引入一个矢量函数 $\mathbf{p}_E(t)$ (即四元数 \mathbf{p}_E), 它由下列分量来确定:

$$\left. \begin{aligned} p_{1E} &= \psi_1 \lambda_0 - \psi_0 \lambda_1 + \psi_2 \lambda_3 - \psi_3 \lambda_2, \\ p_{2E} &= \psi_2 \lambda_0 - \psi_0 \lambda_2 + \psi_3 \lambda_1 - \psi_1 \lambda_3, \\ p_{3E} &= \psi_3 \lambda_0 - \psi_0 \lambda_3 + \psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

矢量函数 $\mathbf{p}_E(t)$ 将称之为共轭控制矢量。可以看出, 哈密顿函数

● 可以证明, 对于具有反对称阵的任何线性微分方程组 $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ 来说, 同一个结论都是正确的, 而且可以得到最佳控制问题的解。

可写成这种形式:

$$\mathcal{H}_E = \frac{1}{2}(\omega_1 p_{1E} + \omega_2 p_{2E} + \omega_3 p_{3E}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_E \cdot \mathbf{p}_E, \quad (6.16)$$

所以, 集 Ξ_E 上函数 \mathcal{H}_E 的最大值条件确定了控制 $\boldsymbol{\omega}_E$ 为共轭矢量的函数, 而这一函数的形式将决定于集 Ξ_E 的构形。

共轭控制矢量借助于关系式(6.15), 由量 ψ_i 和 λ_i 来确定。从前已经证实, 函数 $\psi_i(t)$ 可用 $\lambda_i(t)$ 表示, 因为方程(6.8)和(6.1)具有同样的形式和同样的速度 $\boldsymbol{\omega}_E$ 。由此可见, 原则上有可能, 即 \mathbf{p}_E 仅表示为 $\lambda_i(t)$ 的函数。实际上, 通过简单的验算就可确信, 等式(6.15)可以写成下列四元数之积的形式:

$$\mathbf{p}_E = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi), \quad (6.17)$$

就是说, 函数 \mathbf{p}_E 是四元数 $\tilde{\Lambda}$ 和 Ψ 之积的矢量部分。但是, 四元数 Ψ 和 Λ 的关系由等式(6.14)给出, 可见, 所求之积

$$\tilde{\Lambda} \circ \Psi = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{C}_E \circ \Lambda, \quad (6.18)$$

所以只用四元数 Λ 来确定。

我们来求四元数 $\tilde{\Lambda} \circ \Psi$ 的标量部分:

$$\begin{aligned} \text{sqa}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) &= \text{sqa}(\tilde{\Lambda} \circ \mathbf{C}_E \circ \Lambda) \\ &= \text{sqa}(\tilde{\Lambda} \circ \Lambda \circ \mathbf{C}_E) = \text{sqa} \mathbf{C}_E \end{aligned} \quad (6.19)$$

(因为四元数 Λ 的范数等于 1)。

同样应该指出, 由于共轭方程组的齐次性, 可以这样选择四元数 Ψ , 使它的范数也等于 1, 从此将可看出, \mathbf{C}_E 的范数也等于 1:

$$\|\tilde{\Lambda} \circ \Psi\| = \|\tilde{\Lambda} \circ \mathbf{C}_E \circ \Lambda\| = \|\mathbf{C}_E\| = \|\Psi\| \|\Lambda\| = 1.$$

现在, 利用等式(6.18)和(6.19)可以求出四元数 Ψ 和 Λ 之积的矢量部分:

$$\begin{aligned} \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) &= \tilde{\Lambda} \circ \Psi - \text{sqa}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{C}_E \circ \Lambda - \text{sqa} \mathbf{C}_E \\ &= \tilde{\Lambda} \circ (\mathbf{C}_E - \text{sqa} \mathbf{C}_E) \circ \Lambda = \tilde{\Lambda} \circ (\text{vect} \mathbf{C}_E) \circ \Lambda = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda. \end{aligned}$$

因此, 根据(6.17), 我们最终得到决定共轭控制矢量的下列基本关系式:

$$\mathbf{p}_E = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda. \quad (6.20)$$

这本身就完全解决了最佳空间转弯的运动学问题。实际上,

采用表达式(6.16)的函数 \mathcal{H}_E 的最大值条件(6.9)确定了控制 ω_E 为共轭矢量 p_E 的函数。(6.20)式所确定的矢量 p_E 是相坐标和某一常矢量 c_E 的函数。因此, 控制函数 $\omega_E(t)$ 代入运动的四元数方程(6.1)时给运动方程带来同样的相坐标和常数 c_E , 常数的选择应该单值地满足运动的边界(终端)条件。因此, 问题原则上(不考虑所得方程解析可解性问题)完全解决了。

应该指出, 四元数 Λ 是刚体位置的双值函数(Λ 和 $-\Lambda$ 恒等于一个位置)。根据方程(6.8)和(6.13), 四元数 Ψ 也可以是双值的。由此可见, 四元数 p_E 象 c_E 一样, 也应该假定是双值的, 就是说, 同时满足最佳问题解的两个值 $+c_E$ 和 $-c_E$ 可能存在。正象以后我们证明的, 这种假定是极其重要的。

现在, 我们来求方程第二种形式的最佳转弯问题的解。这种情况下辅助变量 ψ_i 的共轭方程组(6.11)与运动方程(6.4)相同, 因此, 可写成下列形式:

$$2\dot{\Psi} = \omega_I \circ \Psi, \quad (6.21)$$

式中, Ψ 是前面确定的四元数[见(6.13)]。

根据定理 3.1, 方程(6.21)和(6.4)具有同样的基本解组, 可见, 函数 $\Psi(t)$ 同 $\Lambda(t)$ 的差别在于常值四元数, 而且这样的关系是正确的:

$$\Psi = \Lambda \circ C_I. \quad (6.22)$$

我们确信, 这个等式实际上是可以满足的。根据(6.22), 我们有下列的常值四元数表达式: $C_I = \tilde{\Lambda} \circ \Psi$ 。

根据方程(6.4)和(6.21)得到的常值四元数的导数, 实际上等于零:

$$\begin{aligned} 2\dot{C}_I &= -2\tilde{\Lambda} \circ \dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} \circ \Psi + 2\tilde{\Lambda} \circ \dot{\Psi} \\ &= -\tilde{\Lambda} \circ \omega_I \circ \Lambda \circ \tilde{\Lambda} \circ \Psi + \tilde{\Lambda} \circ \omega_I \circ \Psi = 0. \end{aligned}$$

我们来研究哈密顿函数 \mathcal{H}_I (6.10) 并将其表成这种形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \frac{1}{2} \Omega_1 (-\lambda_1 \psi_0 + \lambda_0 \psi_1 + \lambda_2 \psi_3 - \lambda_3 \psi_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega_2 (\lambda_0 \psi_2 - \lambda_2 \psi_0 + \psi_1 \lambda_3 - \lambda_1 \psi_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega_3 (\lambda_0 \psi_3 - \lambda_3 \psi_0 + \lambda_1 \psi_2 - \lambda_2 \psi_1). \end{aligned}$$

类似于 (6.15), 我们引入一个由变数 λ_i 和 ψ_i 确定的矢量函数 $\mathbf{p}_I(t)$ (即四元数 \mathbf{p}_I), 因此:

$$\left. \begin{aligned} p_{1I} &= \lambda_0 \psi_1 - \lambda_1 \psi_0 + \lambda_2 \psi_3 - \lambda_3 \psi_2, \\ p_{2I} &= \lambda_0 \psi_2 - \lambda_2 \psi_0 + \lambda_3 \psi_1 - \lambda_1 \psi_3, \\ p_{3I} &= \lambda_0 \psi_3 - \lambda_3 \psi_0 + \lambda_1 \psi_2 - \lambda_2 \psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

函数 $\mathbf{p}_I(t)$ 也将称之为 共轭控制矢量。哈密顿函数通过它可表成控制函数 ω_I 和共轭矢量 \mathbf{p}_I 的标量积:

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} (\Omega_1 p_{1I} + \Omega_2 p_{2I} + \Omega_3 p_{3I}) = \frac{1}{2} \omega_I \cdot \mathbf{p}_I. \quad (6.24)$$

因为矢量 \mathbf{p}_I 由关系式 (6.23) 被确定为 Ψ 和 Λ 的函数的形式, 而四元数 Ψ 由等式 (6.22) 用 Λ 来表示, 所以, 可能将 \mathbf{p}_I 表为只是变量 $\Lambda(t)$ 的函数。实际上, 通过验算可以确信, 关系式 (6.23) 可表成这样的四元数积:

$$\mathbf{p}_I = \text{vect}(\Psi \circ \tilde{\Lambda}). \quad (6.25)$$

研究所得之积, 根据 (6.22) 得到

$$\Psi \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{C}_I \circ \tilde{\Lambda}.$$

我们来求四元数 $\Psi \circ \tilde{\Lambda}$ 的标量部分:

$$\text{sqa}(\Psi \circ \tilde{\Lambda}) = \text{sqa}(\Lambda \circ \mathbf{C}_I \circ \tilde{\Lambda}) = \text{sqa}(\Lambda \circ \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{C}_I) = \text{sqa} \mathbf{C}_I.$$

由此, 我们以下列形式得到其矢量部分的表达式:

$$\begin{aligned} \text{vect}(\Psi \circ \tilde{\Lambda}) &= \Psi \circ \tilde{\Lambda} - \text{sqa} \mathbf{C}_I \\ &= \Lambda \circ (\mathbf{C}_I - \text{sqa} \mathbf{C}_I) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{c}_I \circ \tilde{\Lambda}. \end{aligned}$$

因此, 最后我们有共轭控制矢量的下列表达式:

$$\mathbf{p}_I = \Lambda \circ \mathbf{c}_I \circ \tilde{\Lambda}. \quad (6.26)$$

共轭控制矢量 (6.26) 可表成只是相坐标和三个常数的函数。函数 \mathcal{H}_I (6.24) 的最大值条件确定 ω_I 为 \mathbf{p}_I 的函数, 也就是成为相坐标和常数的函数。将这个控制代入原始运动方程 (6.4), 则得到, 一般说来总是可解的闭合的线性微分方程组。此时, 常数 \mathbf{c}_I 的选择, 应使之满足边界条件。正象在前一种情况下一样, 应假定函数 \mathbf{p}_I 为双值函数。

在这里求出的最佳空间转弯运动问题的解, 只能确定最佳的

必要条件。这意味着, 为了选择具有最小值准则(转弯时间)的一个解, 对于得到的全部解都应加以分析。

§ 6.3 角速度矢量的模有界时的最佳控制

我们研究容许控制集的边界为一球面, 即角速度的模为有界的控制情况。我们将考虑运动方程的第一种形式。在此种情况下, 集 $\Xi_E(6.2)$ 将由条件

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \leq \omega_0^2 \quad (6.27)$$

确定, 式中 ω_0 是角速度的最大容许模的值。这种固界看来是唯一的, 对于它来说, 运动方程第二种形式的集 $\Xi_I(6.5)$ 也是同样的, 即

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 \leq \omega_0^2 \quad (6.28)$$

顾及到(6.16)形式的哈密顿函数表示, 最大值条件(6.9)可归结为如下要求, 即: 控制矢量 ω_E 和共轭矢量 p_E 的标量积必须为最大, 就是说, 等式

$$\omega_E = h p_E$$

显然应该得到满足, 式中 h 是比例系数, 以外, ω_E 的值应选得尽可能大, 即●

$$\omega_E = \omega_0$$

如果要求共轭矢量 p_E 之长为 1 (即在此种情况下, c_E 的长度也应等于 1), 则上面列出的两最大值条件可写成这种形式:

$$\omega_E = \omega_0 p_E \quad (6.29)$$

根据该问题的解, 共轭控制矢量 p_E 决定于表示式(6.20), 因此, 最佳控制(6.29)将决定于下列关系式:

$$\omega_E = \omega_0 \tilde{\Lambda} \circ c_E \circ \Lambda \quad (6.30)$$

应该指出, 所得表达式是以相坐标函数直接给出的最佳控制, 就是说, 我们得到了最佳控制综合问题的解。显然, 等于共轭控制矢量初始值的矢量值

$$c_E = p_E(t_0)$$

的选择, 应使之满足运动的边界条件(6.3)。

为了得出用四元数 $\Lambda(t)$ 边界值表示 c_E 的表示式, 我们将解

● 明确的表示应为 $\sqrt{|\omega_E|} = \omega_E = \omega_0$ 。——校者

(6.30)代入四元数运动方程(6.1)。我们有下列方程:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega_E = \Lambda \circ (\omega_0 \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda) = \omega_0 \mathbf{c}_E \circ \Lambda。$$

所得方程形式上与带有常值角速度矢量 $\omega_0 \mathbf{c}_E$ 的运动学方程(3.12)相同。满足于初始条件的函数[见解(3.18)]

$$\Lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_E t\right) \circ \Lambda_0 \quad (6.31)$$

就是这一方程的解。为使该函数满足于终端条件,必须使下列条件在 T 时刻成立:

$$\Lambda_T = \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_E T\right) \circ \Lambda_0。$$

我们从这一条件求得

$$\exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_E T\right) = \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0。 \quad (6.32)$$

因为 \mathbf{c}_E 是单位矢量,所以

$$\exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_E T\right) = \cos\left(\frac{1}{2} \omega_0 T\right) + \mathbf{c}_E \sin\left(\frac{1}{2} \omega_0 T\right),$$

由此我们得到矢量 \mathbf{c}_E 的下列表达式 ($\omega_0 T = 2\pi$ 的情况除外,这相当于恒等变换):

$$\mathbf{c}_E = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T} \left(\Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0 - \cos \frac{1}{2} \omega_0 T \right)。 \quad (6.33)$$

将该值代入解(6.31),我们得到

$$\begin{aligned} & \Lambda(t) \\ &= \left[\cos \frac{1}{2} \omega_0 t + \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T} \left(\Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0 - \cos \frac{1}{2} \omega_0 T \right) \sin \frac{1}{2} \omega_0 t \right] \circ \Lambda_0 \\ &= \Lambda_0 \left(\cos \frac{1}{2} \omega_0 t - \sin \frac{1}{2} \omega_0 t \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \omega_0 T \right) + \Lambda_T \frac{\sin \frac{1}{2} \omega_0 t}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T}, \quad (6.34) \end{aligned}$$

就是说,我们以边界条件直接的函数形式得到控制限制已知情况下运动学最佳转弯问题的解。

有趣的是利用关系式(6.32)和(6.33)来表示给定情况的最佳控制函数(6.30):

$$\omega_E(t) = \frac{\omega_0}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T} \left(\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda - \cos \frac{1}{2} \omega_0 T \right).$$

所得结果与变四元数 $(\tilde{\Lambda}, \Lambda)$ 在哪一时刻的取值无关。因为根据 (6.31) 和 (6.32), 我们有

$$\begin{aligned} & \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda \\ &= \tilde{\Lambda}_0 \circ \exp\left(-\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_E t\right) \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_E T\right) \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_E t\right) \circ \Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_{T_0} \end{aligned}$$

由此我们最后得到最佳控制的这一表达式:

$$\omega_E(t) = \frac{\omega_0}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T} \left(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T - \cos \frac{1}{2} \omega_0 T \right). \quad (6.35)$$

因此, 以最大可能的常值角速度 (6.35) 进行的平面转弯 (6.34) 是我们所研究的控制情况下的最佳轨道, 而这一角速度的方向决定于刚体的最终位置和初始位置。由此可见, 当控制作用是模有界的角速度函数时, 刚体以最大容许角速度进行的欧拉平面转动是时间上最佳的转弯。

在前一节中曾经指出, 量 \mathbf{c}_E (和 \mathbf{p}_E) 应取为双值的。我们来说明这一要求的涵义。根据 (6.30), ω_E 的不同的符号, 因而也就是不同的旋转方向将对应于 \mathbf{c}_E 的两种符号 (同四元数 Λ 的符号无关)。这两个解都满足于最佳条件并分别给出角度为 $\omega_0(T-t_0) = \delta$ 或 $\omega_0(T-t_0) = 2\pi - \delta$ (δ 是旋转角) 的转弯。

两个解中只有一个满足于转弯时间最短的条件 (角度为 π 的转弯除外)。根据这一点, 对于最短转弯时间来说应该满足下列最佳充分条件:

$$\omega_0(T-t_0) \leq \pi. \quad (6.36)$$

下面可以看出, 所确定的四元数 $\Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0$ 恰恰是第五章中讨论过的、根据四元数进行控制的问题中的偏差 (就刚体的两个给定位置来说) 四元数。由此可见, 如果这样来形成修正速度:

$$\Omega_{\mathbf{h}} = \Omega_{\max} \frac{\lambda_i}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} \operatorname{sign} \lambda_0 \quad (i=1, 2, 3), \quad (6.37)$$

式中, Ω_{\max} 是修正角速度模的最大值, 则运动学问题中的控制将是最佳的。例如, 控制(5.6)近似于这种控制。

最后, 我们来研究该问题的运动学方程的第二种形式的解。上面已经指出, 容许控制的固界(6.28)与固界(6.27)相同。由此可见, 顾及到哈密顿函数(6.24), 最大值条件(6.12)可写成与运动方程第一种形式的条件类似的两个条件:

$$\omega_I = \hbar p_I, \quad \omega_I = \omega_0.$$

我们要求矢量 p_I 之值(模)等于1, 因此这两个条件可写成类似于条件(6.29)的下列形式:

$$\omega_I = \omega_0 p_I. \quad (6.38)$$

注意到, 根据最佳问题的解, 共轭控制矢量 p_I 决定于表达式(6.26), 对于最佳控制(6.38), 我们得到下列关系式:

$$\omega_I = \omega_0 \Lambda \circ c_I \circ \tilde{\Lambda}. \quad (6.39)$$

显然, 矢量 c_I 由共轭控制矢量的初始值确定:

$$c_I = p_I(t_0).$$

为了得到运动的最佳轨道, 我们将最佳控制(6.39)代入运动的四元数方程(6.4):

$$2\dot{\Lambda} = \omega_I \circ \Lambda = \omega_0 \Lambda \circ c_I.$$

该方程为常值角速度矢量 $\omega_0 c_I$ 的运动学方程 [(3.11) 型]。下列函数是它的解:

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 c_I t\right). \quad (6.40)$$

解(6.40)满足初始条件(6.3)。为使该解通过终点 Λ_T , 必须对矢量 c_I 进行适当的选择。使右端(6.40)在 T 时刻同终端条件(6.3)相等, 便得到:

$$\Lambda_0 \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 c_I T\right) = \Lambda_0.$$

由此得出结论: 重复类似于前述情况的全部计算, 则知矢量 c_I 应由这样的关系式确定 ($\omega_0 T \neq 2\pi$):

$$c_I = \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T} \left[\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T - \cos \frac{1}{2} \omega_0 T \right]. \quad (6.41)$$

将该值代入解(6.40), 便得到与前述情况完全相同的轨道(关系式(6.34)确定的)。自然, 得到的结果是相同的, 因为围界(6.27), 从而最佳运动应该相同, 不过, 它们在不同的坐标系中可能具有不同的表达形式。

我们来求最佳控制函数 $\omega_I(t)$ 。将(6.41)中矢量 \mathbf{c}_I 之值代入等式(6.39), 则得

$$\omega_I(t) = \frac{\omega_0}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T} \left[\Lambda \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda} - \cos \frac{1}{2} \omega_0 T \right]。$$

根据解(6.40)可以证明

$$\begin{aligned} & \Lambda \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda} \\ &= \Lambda_0 \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_I t\right) \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_0 \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_I T\right) \circ \exp\left(-\frac{1}{2} \omega_0 \mathbf{c}_I t\right) \circ \tilde{\Lambda}_0 \\ &= \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0。 \end{aligned}$$

由此我们得到最佳控制的最后表达式:

$$\omega_I(t) = \frac{\omega_0}{\sin \frac{1}{2} \omega_0 T} \left[\Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0 - \cos \frac{1}{2} \omega_0 T \right]。 \quad (6.42)$$

显而易见, 控制函数(6.42)确定与前一种情况下完全相同的欧拉平面旋转。

四元数映象 ω_I (6.42) 和 ω_E (6.35) 确定同一个角速度这样一个事实也可作为它的证明。事实上, 可以验证, 联系同一矢量的两个映象的关系式

$$\omega_E = \tilde{\Lambda} \circ \omega_I \circ \Lambda$$

是成立的。为此, 反演上述计算

$$\Lambda \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0, \quad \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_T \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda = \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T$$

就可以了。可见, 根据(6.42)和(6.35), 前面的关系式是正确的。

§ 6.4 角速度矢量的分量有界时的最佳控制

当每个角速度矢量的分量——投影有界时, 便发生下述控制情况。当给定角速度矢量在固连基 E 上的投影的围界时, 控制的分析具有实际意义。集合 Ξ_E (6.2) 将决定于这些条件:

$$|\omega_{Ei}| \leq \Omega_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (6.43)$$

式中, Ω_i 是固连轴 e_i 的角速度矢量最大容许分量之值。在 ω_{Ei} 的空间内, 集合 Ξ_E 将具有各边等于 Ω_i 的平行六面体的形式。

在这样的容许控制域内, 哈密顿函数的最大值条件 (6.9) 或 (6.16) 归结为要求量 $\omega_E \cdot p_E$ 取最大值, 当每个矢量的分量 ω_E 在矢量 p_E 的方向具有最大值

$$\omega_{Ei} = \Omega_i \operatorname{sign}(p_{Ei}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (6.44)$$

时, 就能使 $\omega_E \cdot p_E$ 达到最大值。

我们用 $\omega_m (m=1, 2, \dots, 8)$ 表示从坐标原点到平行六面体 Ξ_E 的顶点 (即沿它的对角线) 的矢量, 而暂且不论该 ω_m 下标的次序。当 ω_E 的所有三个分量都取极值 (6.43) 时, 可得到这些矢量中的任何矢量。

我们用 ω_{El} 来表示从坐标原点出发垂直于平行六面体 Ξ_E 各棱的矢量。可以看出, 总共有 12 个这样的矢量, 即 $l=1, 2, \dots, 12$ 。当 ω_E 的两个分量取极值, 而一个分量变为零时的矢量 ω_E 就是矢量 ω_{El} 。

最后, 我们用 ω_{En} 来表示自坐标原点出发垂直于平行六面体 Ξ_E 各面的矢量。其中每个矢量之值都等于 Ω_i ; 我们总共有六个这样的矢量, 即 $n=1, 2, \dots, 6$ 。当矢量 ω_E 的两个分量变为零, 而一个分量取极值时的矢量 ω_E 就等于矢量 $\omega_{En} (n=1, 2, \dots, 6)$ 。

现在来研究最佳控制条件 (6.44) 并讨论这些控制能导出怎样的运动。当矢量 $p_E(t)$ 全都位在坐标平面之外, 就是说, 在 $p_{Ei} \neq 0 (i=1, 2, 3)$ 时, 条件 (6.44) 可确定以角速度的一个最大分量 ω_m 实现的这类运动。如果矢量 $p_E(t)$ 位于坐标平面上, 就是说, 它的一个 (或两个) 分量变为零, 那么, 这种情况就是特殊控制。

特殊控制的分析表明, 必须有下列假设 (不是根据最大值原理导出的):

(1) 如果某一分量 p_{Ei} 变为零, 则速度的相应分量 ω_i 可以有三个值: $+\Omega_i, 0, -\Omega_i$ 。换言之, 表达式 (6.44) 中的函数 $\operatorname{sign}(p_{Ei})$ 可以有 $+1, 0, -1$ 三个值。

在 § 6.7 的第 I 点中指出, 这种假设是极其重要的, 因为它可使容许的运动轨道数扩大到它们所需要的数目。

由于函数 (6.44) 的这种性质, 满足最佳性必要条件的可能的运动发生了扩充: 首先, 具有角速度 $\omega_{\varphi l}$ 之一的运动成为可能, 其次, 速度为 $\omega_{\mathcal{A}n}$ 的运动也是可能的。当矢量 \mathbf{p}_E 位在坐标平面上而且分量 p_{Ei} 中的一个变为零时, 出现第一种情况。根据引用的假设, 分量 ω_{Ei} 可能等于 $+\Omega_i$ 、 0 、 $-\Omega_i$, 即容许有角速度为 $\omega_{\varphi l}$ 的运动。在第二种情况下, 矢量 \mathbf{p}_E 位在坐标轴上, 就是说, 它的两个分量变为零, 因此, 速度为 $\omega_{\mathcal{A}n}$ 的运动是可能的 (在 § 6.7 的第 I 点中将证明, 以速度 $\omega_{\mathcal{A}n}$ 运动的其它情况是可能的)。这样一来, 我们总共有 $m+n+l=26$ 个容许角速度矢量, 并且具有其中一种速度的旋转便满足最佳性条件。

我们以 $\omega_k (k=1, 2, \dots, 26)$ 来表示这些速度的总体并把它们称作极值角速度。根据 (6.44), 所有运动轨道应由分段组成, 其中每一段上都产生具有这些角速度矢量之一的旋转。每一段上的旋转都以常值角速度进行。对于这种运动情况, 运动学方程的解 (3.79) 是熟知的。这一情况使我们能够最后地解出运动学最佳转弯的所述问题。

解题的结果应该给出这样一些问题的答案, 即: 整个轨道由多少个运动段组成; 为了实现所需空间转弯, 具有极值角速度的旋转顺序怎样; 怎样有效地把此种情况的最佳控制与前节中所探讨的控制 (6.37) 区分开来。

在转过来研究控制 (6.44) 作用下的运动之前, 我们再作几个一般的假设。

(2) 由边界条件 (6.3) 决定的、所需要的空间转弯, 以最小值的形式给出共轭控制矢量 \mathbf{p}_E^\bullet 的一个初始值。

(3) 我们将认为矢量 \mathbf{p}_E 是双值的; 我们将认为, 运动的边界条件 (6.3) 可以同时给出矢量 \mathbf{p}_E 的两个值, 此时, 运动由在以后

● 下面将证明, 边界条件所能确定的不是一个, 而是几个不同的运动。

的全部运动●中保持着矢量 \mathbf{p}_E 的两个值中的一个来实现。

运动的定性研究 我们回忆一下, 关系式 (6.44)、(6.20) 和 (6.1) 同边界条件 (6.3) 一起构成描述最佳运动学转弯的封闭方程组。根据 (6.44), 所有运动都将由以速度 ω_k 的分段旋转组成。所以, 最佳转弯的角速度将是逐段常数函数。当坐标平面与矢量 \mathbf{p}_E 相交时, 角速度的函数就出现间断。

我们研究一下, 对于这类轨道是怎样满足关系式 (6.20) 的。我们以 Λ_k 表示 k 段上运动的四元数终端值。于是, 这个值将是速度 ω_{k+1} 进行的运动在 $(k+1)$ 段上的四元数初始值。 $(k+1)$ 段上运动的运动学方程的解具有下列形式:

$$\Lambda(t'_{k+1}) = \Lambda_k \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_{k+1} t'_{k+1}\right), \quad (6.45)$$

式中, $t_k \leq t'_{k+1} \leq t_{k+1}$, t'_{k+1} 是 $(k+1)$ 运动段上的时间变量。值 $\Lambda(t'_{k+1})$ 将等于 Λ_{k+1} 。

对于第一段运动, 类似于 (6.45), 我们有

$$\Lambda_1 = \Lambda_0 \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_1 t_1\right),$$

式中, Λ_0 决定于初始条件 (6.3)。如果运动始于第一段, 而到第 k 段结束, 根据 (6.45), 便得到终端四元数

$$\Lambda_T = \Lambda_0 \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_1 t_1\right) \circ \cdots \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_k t_k\right),$$

这符合定理 (2.4)。

假定我们有共轭控制矢量的初始值 $\mathbf{p}_{E0} = \mathbf{c}_E$, 根据关系式 (6.20), 在第一段运动的终端, 它决定于这种表达式:

$$\mathbf{p}_{E1} = \tilde{\Lambda}_1 \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda_1 = \exp\left(-\frac{1}{2} \omega_1 t_1\right) \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda_0 \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_1 t_1\right).$$

我们把量 $\tilde{\Lambda}_0 \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda_0$ 作为 \mathbf{p}_{E0} , 于是,

$$\mathbf{p}_{E1} = \exp\left(-\frac{1}{2} \omega_1 t_1\right) \circ \mathbf{p}_{E0} \circ \exp\left(\frac{1}{2} \omega_1 t_1\right).$$

第一段的终端值将是第二段运动的初始值, 可见, 在第二段运动的

● 假设 (3) 不象假设 (2) 那样明显; 其论证在 § 6.7 的第 1 点中有所介绍。

终端, 将有

$$\mathbf{p}_{E2} = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_2 t_2\right) \circ \mathbf{p}_{E1} \circ \exp\left(\frac{1}{2}\omega_2 t_2\right).$$

继续应用这一公式, 我们在运动的终端得到矢量 \mathbf{p}_E 的值为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{E\tau} &= \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_k t_k\right) \circ \cdots \circ \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_1 t_1\right) \circ \mathbf{p}_{E0} \circ \exp\left(\frac{1}{2}\omega_1 t_1\right) \circ \cdots \circ \\ &\exp\left(\frac{1}{2}\omega_k t_k\right) = \tilde{\Lambda}_\tau \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda_\tau. \end{aligned}$$

由此可见, 关系式 (6.20) 对于角速度的逐段连续函数也是正确的。
量

$$\exp\left(\frac{1}{2}\omega_1 t_1\right) \circ \cdots \circ \exp\left(\frac{1}{2}\omega_k t_k\right)$$

是合成运动。可以看出, 它由边界条件 (6.3) 唯一地确定。我们以下列方法表示它:

$$\Lambda_\Sigma = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_1 t_1\right) \circ \cdots \circ \exp\left(\frac{1}{2}\omega_k t_k\right) = \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_\tau. \quad (6.46)$$

给定的合成四元数也可确定共轭控制矢量初始值与终端值之间的关系式。

$$\mathbf{p}_{E\tau} = \tilde{\Lambda}_\Sigma \circ \mathbf{p}_{E0} \circ \Lambda_\Sigma. \quad (6.47)$$

根据假设 (2), 量 Λ_Σ 应确定矢量的初始值 \mathbf{p}_{E0} 。在进行问题的定性研究时, 我们以相反的步骤进行: 我们将认为, 先给定矢量 \mathbf{p}_{E0} , 再分析得到的运动和合成四元数。

假定量 Ω_i (6.43) 相等, 即边为 $2\Omega_i$ 的立方体是容许控制域 Ξ_E 。为不失一般性, 我们可以假定 $\Omega_i = 1$ 。此时, 立方体 Ξ_E 就内切于半径为 $\sqrt{3}$ 的球 (图 6.1)。根据关系式 (6.44) 和关于函数 $\text{sign}(0)$ 的假设 (1), 运动将以下列角速度进行: ① 等于立方体的对角线之半长 ω_m ——每个角速度值等于 $\sqrt{3}$; ② 等于正方形 (立方体的面) 对角线之半长 ω_{φ_i} ——每个角速度之值等于 $\sqrt{2}$; ③ 等于立方体的棱之半长 ω_{x_i} ——每个角速度之值等于 1。

正象图 6.1 中所表示的那样 (诚然, 不是对于所有的 ω_k), 我们对速度进行了编号。我们将认为, 矢量的初始值 \mathbf{p}_{E0} 已经给定

并讨论由它的位置所确定的各种运动情况。我们介绍一下这种分析的结果。

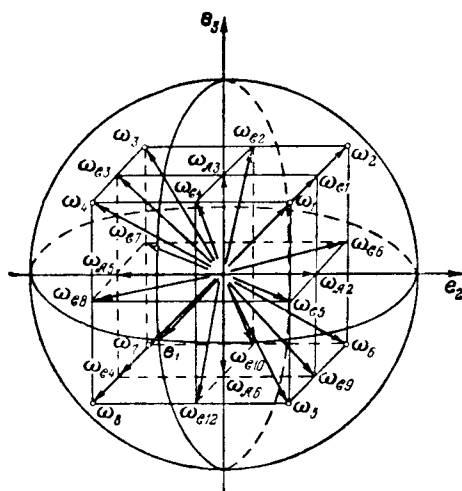


图 6.1

从图 6.2 中可以看出, 在球面上有八个区域 $\mathcal{B}_m (m=1, 2, \dots, 8)$ 。如果矢量 \mathbf{p}_{E0} 位在这种区域内, 运动则以速度 ω_m 进行, 而由

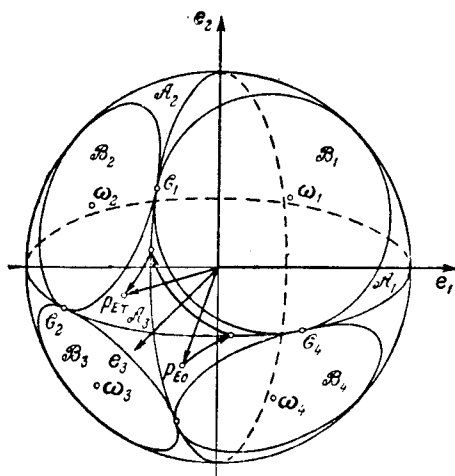


图 6.2

于运动的结果, 矢量 \mathbf{p}_{E0} 并不改变其分量的符号。事实上, 当沿锥面向任何一方旋转时, 位于区域 \mathcal{B}_m 内的矢量 \mathbf{p}_E 既不与坐标平面相交也不与之相切。这种运动情况的边界是矢量 \mathbf{p}_{E0} 与坐标平面相切的位置, 因为容许控制域是立方体, 所以这时, 它就同时与三个平面相切。我们将把这种边界称作分隔线并将认为它不属于区域 \mathcal{B}_m 。

量 \mathbf{p}_{E0} 位于区域 \mathcal{B}_m 内的任何位置时, 只出现一种运动情况, 即合成旋转具有速度为 ω_m 的一段运动。我们将以 Λ_m 表示相应的四元数。此种情况下的合成四元数将仅仅决定于一个分量:

$$\Lambda_m = \exp\left(\frac{1}{2} \omega_m t\right). \quad (6.48)$$

矢量 \mathbf{p}_{E0} 和 ω_m 重合时的运动情况, 对应于球面上和区域 \mathcal{B}_m 内矢量 \mathbf{p}_{E0} 终端位置的点集。由此可见, 区域 \mathcal{B}_m 等价于矢量 ω_m 同球面相交所确定的一个点。这个点具有特殊的性质, 当矢量 $\mathbf{p}_E(t)$ 通过它时, 由于它所确定的运动而不改变矢量 $\mathbf{p}_E(t)$ 的位置 (矢量保持不变)。这样的点我们将称作逗留点。

还可看出, 在球面上有六个不同于 \mathcal{B}_m 而且由分隔线把它们分开的区域 $\mathcal{A}_n (n=1, 2, \dots, 6)$ (我们还将认为分隔线也不属于区域 \mathcal{A}_n)。当矢量 \mathbf{p}_{E0} 位于任一个区域 \mathcal{A}_n 中时, 矢量 \mathbf{p}_E 就可能达到坐标平面并与之相交。正因为如此, 在这些区域中就可能有不同的角速度的运动。此时的旋转速度为 ω_m , 而速度改变的顺序和每一分段恒速运动的时间长短决定于矢量 \mathbf{p}_{E0} 的位置。当矢量 \mathbf{p}_{E0} 位于区域 \mathcal{A}_n 中时, 所产生的运动的类型, 将在后面研究。

在矢量 \mathbf{p}_{E0} 位在分隔线上的情况下, 如果矢量 \mathbf{p}_E 落在点 \mathcal{C}_i 上, 就会出现运动的特殊情况 (见图 6.2)。此时, 这一矢量的一个分量变为零。根据假设 (1), 这些点上函数 $\text{sign}(0)$ 之值可能等于 $+1, 0, -1$ 。当 $\text{sign}(0)$ 之值等于 ± 1 时, 旋转角速度, 根据 (6.44) 将等于 ω_m 中的一个, 而以这种速度旋转的结果, 矢量 \mathbf{p}_E 便离开点 \mathcal{C}_i 。但是, 函数 $\text{sign}(0)$ 之值若等于零, 则可能发生速度为 $\omega_{\mathcal{C}_i}$ 的运动。在这种运动的情况下, 通过点 \mathcal{C}_i 的矢量 \mathbf{p}_E 与

矢量 $\omega_{\mathcal{C}l}$ 重合, 可见, 由于运动的结果, 它没有改变自己的位置。

这样一来, 我们得到又一种逗留点的情况: 当矢量 p_{E0} 通过点 $\mathcal{C}l$ 而且函数 $\text{sign}(0) = 0$ 时, 运动由速度为 $\omega_{\mathcal{C}l}$ 的一个分段的旋转组成。我们用 $\Lambda_{\mathcal{C}l}$ 来表示相应的四元数:

$$\Lambda_{\mathcal{C}l} = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\mathcal{C}l}t\right). \quad (6.49)$$

还有一种类型的逗留点, 在这一点能够实现由一段组成的运动。这一点位于区域 \mathcal{A}_n 的中心, 即球面同坐标轴的交点。如果矢量 p_E 通过该点, 它的两个分量则可能变为零。根据假设(1), 控制函数(6.44)此时产生以速度 $\omega_{\mathcal{A}n}$ 进行的旋转。这种旋转不会改变矢量 p_E , 就是说, 也是逗留点。我们以 $\Lambda_{\mathcal{A}n}$ 来表示速度为 $\omega_{\mathcal{A}n}$ 的旋转四元数:

$$\Lambda_{\mathcal{A}n} = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\mathcal{A}n}t\right). \quad (6.50)$$

这样, 我们就证明了, 在球面上存在这样的矢量 p_{E0} 位置, 这个位置确定了任何一种极值速度 ω_k 的运动。当矢量 p_{E0} 位在区域 \mathcal{A}_n 内的这些点以外的位置上, 但又处在分隔线上时, 便实现具有不同极值速度的若干段旋转运动。

我们根据分段的数目和旋转角速度的顺序, 对可能的运动加以分类。

我们首先将指出已讨论过的逗留点的旋转情况, 这时, 合成运动由一个分段组成。

我们有下列类型的运动(轨道):

I. $\Lambda_z = \Lambda_m$ [矢量 p_{E0} 位在区域 \mathcal{B}_m 内时; 见(6.48)];

II. $\Lambda_z = \Lambda_{\mathcal{A}n}$ [矢量 p_{E0} 位在坐标轴与球面的交点时; 见(6.50)];

III. $\Lambda_z = \Lambda_{\mathcal{C}l}$ [矢量 p_{E0} 位在点 $\mathcal{C}l$ 时; 见(6.49)]。

现在, 我们研究矢量 p_{E0} 位在区域 \mathcal{A}_n 内的情形。为确切起见(这并不失一般性), 我们将认为, 矢量 p_{E0} 位于第一象限的区域 \mathcal{A}_3 内, 这个象限是由轴 e_1 、 e_2 、 e_3 的正向形成的。所得矢量 p_E

的轨道示于图 6.3。我们要注意, 当矢量 \mathbf{p}_{E0} 位在区域 \mathcal{A}_n (除中心点以外的任何位置上) 时, 只以速度 ω_n 进行运动。实际上, 即使在矢量 \mathbf{p}_E 的一个分量变为零, 因而它落在坐标平面上时, 矢量 \mathbf{p}_E 也不逗留在该平面上, 而是与之相交。

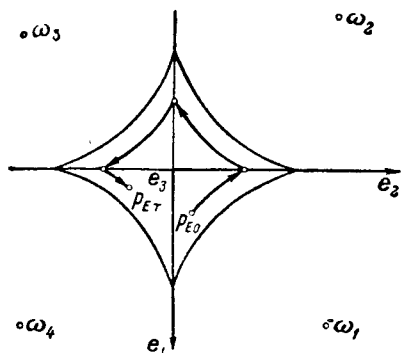


图 6.3

作为例子, 我们研究矢量 \mathbf{p}_E 通过平面 $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 的情况(见图 6.3)。在象限 $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 中, 运动以速度 ω_1 进行, 因而, 矢量 \mathbf{p}_E 落在平面 $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 上, 而分量 \mathbf{p}_{E1} 变为零。根据假设(1), 函数 $\text{sign}(0)$ 取值 $+1$ 或 0 , 或 -1 , 而且在这些情况下, 运动将分别以 ω_1 、 $\omega_{\neq 1}$ 或 ω_2 进行。在所有的情况下, 矢量 \mathbf{p}_E 都应 与平面 $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ 相交。根据图 6.3, 我们有下列类型的运动:

IV. $\Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2;$

V. $\Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3;$

VI. $\Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4;$

VII. $\Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda'_1.$

可能会有弧 Λ'_1 的终点 (即矢量 \mathbf{p}_{ET}) 落在点 \mathbf{p}_{E0} 上的情形。我们把这种情形称作闭循环。显然, 当轨道长于一个闭循环和形成双循环等等 (分段数目可无限增加) 时, 分段数目就可能进一步增加。由于任一旋转顺序都应对应于给定旋转 Λ_2 , 所以, 分段数目的增加, 原则上, 只有在下列情况下才是可能的, 即: 每一分段的

长度不断减小,致使矢量 \mathbf{p}_{E0} 向区域 \mathcal{A}_3 的中心逼近。如果矢量 \mathbf{p}_{E0} 位在中心附近,运动则将由无限个无穷小旋转组成,就是说,我们将有一个所谓的滑动状态。这种运动的合成速度将等于 $\omega_{\mathcal{A}3}$ 。

可以看出,得到的逗留旋转的情况(6.50)是无限个循环运动的极限,这种循环运动趋向于类型 II 的轨道。由此也可看出,与旋转(6.48)和(6.49)不同,旋转(6.50)是特殊的并且不能同其它旋转●对接。

我们来证明,在上面确定的任一运动轨道上,任意参数数目都不超过三个,即不超过给定刚体任意转动所必须的数目。显然,由 m 段组成的轨道具有 m 个自由参数(旋转角)。由此可见,由一段、两段或三段运动组成的轨道,一义地决定于合成四元数 Λ_s 。然而,最大值条件(即矢量 \mathbf{p}_E 连续运动的条件)使旋转角的值受到限制。可以看出,在类型 V 的轨道上,下列等式应该得到满足:

$$\vartheta_2 \geq \vartheta_1, \quad \vartheta_2 \geq \vartheta_3, \quad \vartheta_2 < \frac{2\pi}{3}, \quad (6.51)$$

从此得出结论,最佳轨道只能是时间最长的中间分段的运动轨道。如果条件(6.51)成立,矢量 \mathbf{p}_E 的运动轨道则可同运动 Λ_s 分解为三个旋转 Λ_m 的任何情况相比拟。对于类型 VI 的轨道来说,第二段的长度与第三段相等,而自由参数数目也等于三:

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 < \frac{2\pi}{3}, \quad \vartheta_1 \leq \vartheta_2 = \vartheta_3, \quad \vartheta_4 \leq \vartheta_2 = \vartheta_3. \quad (6.52)$$

对于五段和五段以上的运动来说,存在有类似的情况。

最后,我们讨论矢量 \mathbf{p}_{E0} 位在分隔线上时产生的运动类型(图 6.4)。在这种情况下,可能有由一个分段组成的运动,即以前讨论过的类型 I 和 III 的轨道。可以看出,如果矢量 \mathbf{p}_E 通过点 \mathcal{C}_1 , 而函数 $\text{sign}(0)$ 不取零值,则可能出现类型 IV 的轨道。但是,与前述情况不同,在该轨道中有可能存在旋转角大于 $\frac{2\pi}{3}$ 的运动段。基于这一理由,在上面我们没有限制类型 IV 的轨道的旋转角。当

● 在 § 6.7 的第 I 点中讨论了其它的假设,其中类型 II 的运动可以转变为其它类型的运动。

矢量 \mathbf{p}_E 在这些条件下进一步运动时, 可能实现类型 V 的轨道 (旋转角 $\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$) 以及 VI、VII 类型的轨道。但是, 正如下面将要证明的, 含有两段以上旋转 (转角为 $\frac{2\pi}{3}$) 的轨道, 可给出大于 π 的合成旋转角。因此, 在前述 (6.52) 式中取严格不等式的符号。

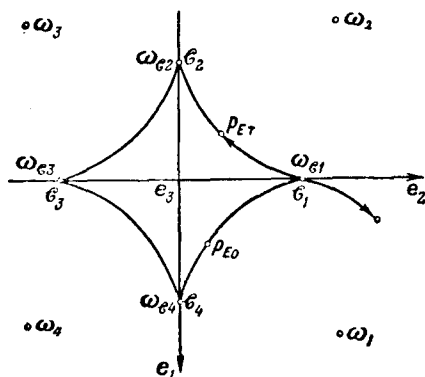


图 6.4

下述轨道对于矢量 \mathbf{p}_{E0} 位于分隔线上 (见图 6.4) 的情况来说, 将是一种新类型的轨道:

$$\text{VIII } \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1}.$$

当矢量 \mathbf{p}_E 位于点 c_1 时, 如果函数 $\text{sign}(0)$ 取零值, 则出现这种轨道。下面, 假定矢量 \mathbf{p}_{E0} 位于点 c_1 而且它对应于旋转 (6.49)。但若假定, 经过某一时间后函数 $\text{sign}(0)$ 的值由 0 变为 +1, 则轨道将与下列情况相当:

$$\text{IX } \Lambda_2 = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_1.$$

下列轨道将是这种类型的轨道:

$$\text{X } \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_1'.$$

如果在零值之后函数 $\text{sign}(0)$ 之值为 -1, 属于类型 IX 的轨道 $\Lambda_2 = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2$ 将与这种情况相对应。但是, 如果运动始于速度为 ω_1 的旋转, 则会产生又一种类型的轨道:

$$\text{XI } \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2.$$

用类似的方法进行讨论, 还可得到这样一些类型的轨道:

$$\text{XII} \quad \Lambda_2 = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2};$$

$$\text{XIII} \quad \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2};$$

$$\text{XIV} \quad \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2} \circ \Lambda_3.$$

在这三种情况下, 旋转角 ϑ_2 (四元数 Λ_2) 等于 $\frac{2\pi}{3}$ 。运动段数的进一步增加是不可能的, 因为这至少会导致角度为 $\frac{2\pi}{3}$ 的两次旋转, 使得它总共产生一个大于 π 的角度 ϑ_2 。在 § 6.7 的第 II 点中证明了, 当 $\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$ 时, 类型 XII 的轨道等价于类型 VIII 和 IX 的轨道, 即

$$\Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2} = \Lambda'_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 = \Lambda_2 \circ \Lambda'_{\varphi 2}, \quad (6.53)$$

同时, 在类型 XII 的轨道上发生旋转弧 $\Lambda_{\varphi 1}$ 和 $\Lambda_{\varphi 2}$ 的相加, 即:

$$\vartheta'_{\varphi 1} = \vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2} = \vartheta'_{\varphi 2}.$$

从类型 XII 的轨道的这一性质可以得出, 类型 XIII 的轨道等价于下列轨道:

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2} = \Lambda_1 \circ \Lambda'_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda'_{\varphi 2}.$$

在第一种情况下, 显然, 我们有类型 XI 的轨道, 第二种情况可确定新类型的轨道, 同样以编号 XIII 记述之:

$$\text{XIII} \quad \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2}, \quad \vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

(注意到, 当 $\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$ 时, 这一轨道等价于类型 XI 的轨道)。我们认为

$$\text{XIII} \quad \Lambda_2 = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2, \quad \vartheta_1 = \frac{2\pi}{3}$$

这样的轨道也属于这种类型。用类似的方法我们得出, 类型 XIV 的轨道可归结为

$$\text{XIV} \quad \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2} \circ \Lambda_3, \quad \vartheta_{\varphi 1} = \vartheta_{\varphi 2},$$

这样的轨道, 因为 ϑ_2 始终等于 $\frac{2\pi}{3}$ 。

这样, 我们就确定了可能有的 14 种类型的运动轨道。可以看

出, 在类型 VIII~XIV 的每一轨道上的自由参数数目不超过三个, 即不超过被已知合成旋转 Λ_z 单值确定(当旋转方向给定时)的参数数目。由此可以得出, 每种类型轨道的全部旋转分量可根据量 Λ_z 确定。

另一方面, 如果合成旋转(6.46)给定, 一般说来, 则有若干条(所列举的数目中的)满足最佳条件的轨道与之对应。例如, 从最佳条件仅仅是必要条件这一点出发, 上面所说的情况是可以预料的。从所有这些轨道中选出最短轨道的条件将是最佳的充分条件。

为了转到该问题的分析上, 应该确定, 对于给定的合成四元数, 在上面所列举的 14 类轨道中可能有几种存在? 假定四元数 Λ_z 决定于转角 ϑ_z 和矢量 ζ_z (1.11), 后者给定球面上的点(矢量 ζ_z 同球面的交点)。角 ϑ_z 和两个参数——矢量 ζ_z 的坐标对应于三个独立参数(我们将以量 γ_1 、 γ_2 和 γ_3 ——矢量 ζ_z 的方向余弦确定之)。我们考虑球面上这样的区域, 可能有的 14 种类型轨道中的每一种, 其矢量 ζ_z 的终端都位于该区域中。

I、II 和 III 类轨道都有一个自由参数, 即旋转角, 它应该等于 ϑ_z 。基于这种理由, 这样的轨道在球面上仅有一个点(就是说, 点是轨道所在的区域)。由两段组成的 IV、VIII、IX、XII 类轨道各有两个自由参数, 因此在球面上确定矢量 Λ_z 终端所在的线。所有其它轨道在球面上都有有界的(就面积来说)区域。这些区域, 自然以线为界, 而这些线是此种运动的某些边界情况。当从一种运动转为另一种运动时, 则将产生每一种这样的边界情况。此时, 这种转换的条件便是将自由参数数目从 3 个减到 2 个(这两个自由参数与球面上的线相对应)这样的附加条件。

我们证明, 这样的边界情况实际上有两个自由参数, 即确定球面上的线。例如, V 类轨道的区域一边界于 $\vartheta_1 = \vartheta_2$ 或 $\vartheta_2 = \vartheta_3$ 的情况(此时自由参数数目实际上等于 2 个); 这些情况决定着 V 类和 VI 类轨道之间转换的边界; 另一边, 这个区域界于 $\vartheta_1 = 0$ 和 $\vartheta_3 = 0$ 的情况, 即 IV 类轨道。

VI 类轨道的区域界于上述 V 类轨道的边界 (VI 类轨道上满足条件 $\vartheta_1=0$ 或 $\vartheta_4=0$ 时, 则发生这种情况), 这一区域的另一边界决定于 $\vartheta_2=\vartheta_3=\vartheta_4$ 或 $\vartheta_1=\vartheta_2=\vartheta_3$ 的情况 (这些边界使此类轨道和 VII 类轨道分开)。

VII 类轨道同 VII 类以后的轨道是由这样的边界分开的:
 $\vartheta_2=\vartheta_3=\vartheta_4=\vartheta_1+\vartheta'_1$, $\vartheta_2=\vartheta_1=\vartheta_3=\vartheta_4$ 和 $\vartheta_2=\vartheta_3=\vartheta_4=\vartheta'_1$ 。

X 类轨道仅有两个边界: 当 IX 类轨道为 X 类轨道的边界时, 第一个边界由条件 $\vartheta_1=0$ 确定, 而当它以 VIII 类轨道为边界时, 第二个边界就由 $\vartheta'_1=0$ 确定。I 类轨道对应于 $\vartheta_{\varphi 1}=0$ 的情况, 即两边界——VIII 和 IX 类轨道的两边界收缩为一个点 (当 $\vartheta_{\varphi 1}=0$ 时)。

XI 类轨道有下列边界: $\vartheta_{\varphi 1}=0$ 时, 以 IV 类轨道为边界; 当 $\vartheta_1=0$ 或 $\vartheta_2=0$ 时, 以 VIII 类或 IX 类轨道为边界。当角 ϑ_2 达到 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 我们便得到 XI 类和 XIII 类轨道之间的边界 (在后一种情况中, 应假定 $\vartheta_1=0$)。类似于 (6.53), 当我们有

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} = \Lambda_{\varphi 4} \circ \Lambda_1$$

时, 在 $\vartheta_1 = \frac{2\pi}{3}$ 的情况下, 还存在其它类型的边界, 因此, 我们得到 XIII 类轨道的第二种变形:

$$\Lambda_{\Sigma} = \Lambda_{\varphi 4} \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2。$$

XIII 和 XIV 类轨道仅在角 ϑ_2 较大的情况下存在, 其所在区域如下: XIII 类轨道有两个自由参数, 就是说, 它是把 XI 类轨道和 XIV 类轨道分开的线 (边界)。这样一来, 就能作出每类轨道存在的整个区域。这就可确定: 一条 (或若干条) 什么样的轨道能够实现给定的转弯 Λ_{Σ} 。如果在该点上有若干条轨道, 则必须从中选出最短的。从而将给出所提课题的全部问题的答案: 将确定旋转变角速度和它们的旋转顺序、以有界的容许速度旋转的分段数目和各分段的旋转时间。

最后, 我们作以下说明。条件 (6.47) 确定了使我们能够求出

\mathbf{p}_{E0} 和 $\mathbf{p}_{E\tau}$ 的下列两个关系: 矢量 λ_z 和 \mathbf{p}_{E0} 之间的夹角等于矢量 λ_z 和 $\mathbf{p}_{E\tau}$ 之间的夹角, 而分别由矢量 λ_z 和 \mathbf{p}_{E0} 以及矢量 λ_z 和 $\mathbf{p}_{E\tau}$ 构成的平面之间的两面角等于 θ_z 。另一方面, 我们看到了, 在任一最佳轨道上都单值地确定了各分旋转的弧长; 同时, 也单值地给定了矢量 \mathbf{p}_{E0} 和 $\mathbf{p}_{E\tau}$ 的位置。上述两个条件似乎是过多了或者说确定矢量 \mathbf{p}_{E0} 和 $\mathbf{p}_{E\tau}$ 位置的条件比必要的数目多。原来, 在最佳轨道上, 确定矢量 \mathbf{p}_{E0} 和 $\mathbf{p}_{E\tau}$ 的这两种条件是一致的。因而, 特别地可以得出这样的结论: 在 VII 类闭循环轨道上, 等式

$$\mathbf{p}_{E0} = \mathbf{p}_{E\tau}$$

是成立的。根据(6.47), 这在矢量 λ_z 按矢量 \mathbf{p}_{E0} 定向时, 而且只有这时上式才可能成立。

可以看出, 导致双循环出现的轨道的分段数目也可能进一步增加。在这种情况下, 若矢量 \mathbf{p}_E 的第一次“周转”(即第一次循环)在 t_1 时刻结束, 我们则有

$$\mathbf{p}_E(t_1) = \mathbf{p}_{E0},$$

因而, 矢量 $\lambda_z(t_1)$ 也按矢量 \mathbf{p}_{E0} 定向。又因为对于双循环来说, 合成四元数可以表成

$$\Lambda_z(T) = \Lambda_z(t_1) \circ \Lambda_z(T - t_1),$$

而且 $\Lambda_z(T)$ 和 $\Lambda_z(t_1)$ 具有 \mathbf{p}_{E0} 的方向, 所以 $\Lambda_z(T - t_1)$ 也有同样的方向并且其旋转角[也象 $\Lambda_z(t_1)$ 一样]等于角 θ_z 之半。

对于三倍、四倍循环等, 我们有类似的划分。当循环数增加到无穷大和每一运动分段减小到零时, 这种循环的极限是具有所有四种速度(在此种情况下为 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 、 ω_4) 且等价于以速度 ω_{M3} 旋转的逗留情况的滑动状态。

小角度旋转

小角度旋转令人感兴趣的是, 使我们能够求出任何类型轨道的解析解。我们细致地进行了这种研究, 以使用实例说明各类轨道区域的确定方法。

我们按照图 6.1 中标出的角速度位置来推导作为具有角速度值(6.44)的运动学方程的解的四元数表达式。

对于速度 ω_m , 根据(6.48)我们有(仅推导前四个解)

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_1 &= \cos \frac{\vartheta_1}{2} + \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_1}{2}, \\ \Lambda_2 &= \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \frac{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2}, \\ \Lambda_3 &= \cos \frac{\vartheta_3}{2} + \frac{-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_3}{2}, \\ \Lambda_4 &= \cos \frac{\vartheta_4}{2} + \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_4}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

对于速度 $\omega_{\mathcal{A}n}$, 根据(6.50)我们得到这样的解:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{A}1} &= \cos \frac{\vartheta_{\mathcal{A}1}}{2} + \mathbf{e}_1 \sin \frac{\vartheta_{\mathcal{A}1}}{2}, \\ \Lambda_{\mathcal{A}2} &= \cos \frac{\vartheta_{\mathcal{A}2}}{2} + \mathbf{e}_2 \sin \frac{\vartheta_{\mathcal{A}2}}{2}, \\ \Lambda_{\mathcal{A}3} &= \cos \frac{\vartheta_{\mathcal{A}3}}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{\vartheta_{\mathcal{A}3}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

(推导前三个解)。

对于速度 $\omega_{\mathcal{A}l}$, 我们也推导前三个速度值的解(6.49):

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\mathcal{A}1} &= \cos \frac{\vartheta_{\mathcal{A}1}}{2} + \frac{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{\vartheta_{\mathcal{A}1}}{2}, \\ \Lambda_{\mathcal{A}2} &= \cos \frac{\vartheta_{\mathcal{A}2}}{2} + \frac{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{\vartheta_{\mathcal{A}2}}{2}, \\ \Lambda_{\mathcal{A}3} &= \cos \frac{\vartheta_{\mathcal{A}3}}{2} + \frac{-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{\vartheta_{\mathcal{A}3}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

我们将认为, 所有分四元数的角度 ϑ_k 是小角度, 从而可将它们的乘积忽略不计。在这种情况下, 第一, 合成旋转角 ϑ_z 也将是小的; 第二, 在小角度旋转的四元数相乘时, 就可将其矢量部分进行相加(见 § 3.1)。

我们研究矢量 \mathbf{p}_E 位在区域 \mathcal{A}_n 内时存在的 IV~VII 类轨道。我们从 IV 类轨道开始讨论。根据(6.54), 对于小角度 ϑ_k , 我们得到

$$\Lambda_z = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \approx 1 + \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_1 + \frac{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_2;$$

对于小角度 ϑ_z , 我们同样得到

$$\Lambda_z \approx 1 + \frac{1}{2}(\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3) \vartheta_z.$$

比较四元数的分量, 我们有

$$\gamma_1 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad \gamma_2 \vartheta_z = \gamma_3 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vartheta_1 + \vartheta_2).$$

由此可见, 合成四元数只能在球面弧上, 球面弧是由球面与 $\gamma_2 = \gamma_3$ 的平面相截而构成的。这是可以预料的, 因为两矢量 θ_1 和 θ_2 之和能够给出在该两矢量构成的平面上的合成矢量。解所得等式, 便以四元数 Λ_z 的函数形式求出各分旋转的角度:

$$\vartheta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \vartheta_z, \quad \vartheta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) \vartheta_z.$$

使这些角为正的条件的条件决定于下列弧段:

$$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_2 \geq \gamma_1, \quad \gamma_2 = \gamma_3. \quad (6.57)$$

这类轨道的四元数矢量 Λ_z 的终端正好都位在这个弧上。

下面, 我们研究 V 类轨道。同前一情况类似, 我们有这样的合成四元数的表达式:

$$\begin{aligned} \Lambda_z = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \approx 1 + & \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_1 \\ & + \frac{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_2 + \frac{-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_3, \end{aligned}$$

由此

$$\gamma_1 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3),$$

$$\gamma_2 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3),$$

$$\gamma_3 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3).$$

我们解关于角 ϑ_k 的这些方程:

$$\vartheta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vartheta_z (\gamma_1 + \gamma_3),$$

$$\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_z (\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_z (\gamma_3 - \gamma_2)。$$

旋转角 θ_k 为正的条件的, 以及条件 (6.51) 决定着由三个分段组成的运动在球面上的所在区域

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_3 \geq 0, \quad \gamma_2 \geq \gamma_1, \quad \gamma_3 \geq \gamma_2, \\ \gamma_2 - \gamma_1 \geq \gamma_1 + \gamma_3, \quad \gamma_2 - \gamma_1 \geq \gamma_3 - \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

显然, 每个不等式都决定着作为球面与下述平面的交线的边界:

$$\gamma_1 + \gamma_3 = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_1, \quad \gamma_3 = \gamma_2, \quad \gamma_2 = 2\gamma_1 + \gamma_3, \quad 2\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_3,$$

就是说, 所有的边界都是大圆弧 (所有的平面都通过球心)。所述五个边界示于图 6.5, 其中半球面就以平面表示。不等式 (6.58) 用划有斜线的区域标出。正象从图中所看到的, 只有四个边界 [就是: 第一、第三、第四和第五个条件 (6.58)] 是实质性的。(6.58) 的前三个条件恒等于条件 (6.57) 并确定这样的边界: 当接近它时, 三个分段运动中的一个分段则变为零。从此可以得出, (6.57) 这类弧段, 即 IV 类轨道的弧段是 V 类轨道区域一边的边界。可以预料, 其它两个边界 [(6.58) 的第四和第五个条件] 将确定 V 类的转换。在 V 类轨道的区域内, 处处都能满足严格的不等式 (6.51) 而且角 θ_1 , θ_2 和 θ_3 是正的。

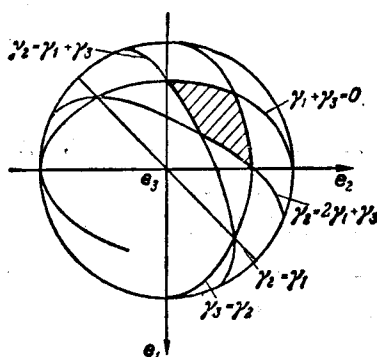


图 6.5

我们来研究 VI 类轨道。将四元数 (6.54) 之值代入合成四元数的表达式, 使得

$$\Lambda_z = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \approx 1 + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_1 + \frac{-e_1 + e_2 + e_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_2 \\ + \frac{-e_1 - e_2 + e_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_3 + \frac{e_1 - e_2 + e_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_4。$$

比较单位 e_i 的系数, 我们得到

$$\gamma_1 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 + \vartheta_4),$$

$$\gamma_2 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vartheta_1 + \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4),$$

$$\gamma_3 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4),$$

而且 (6.52) 的第二个条件给出另一等式

$$\vartheta_2 = \vartheta_3,$$

借助于该等式可解各分旋转角的给定方程:

$$\vartheta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \vartheta_z (2\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_3),$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \vartheta_z (\gamma_3 - \gamma_1),$$

$$\vartheta_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \vartheta_z (\gamma_1 + \gamma_3 - 2\gamma_2)。$$

要求角 ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 和 ϑ_4 为正, 以及条件 (6.52) 确定 VI 类轨道区域的下列边界:

$$\left. \begin{aligned} 2\gamma_2 \geq \gamma_1 + \gamma_3, \quad 2\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_3 \geq 0, \quad \gamma_3 \geq \gamma_1, \\ \gamma_1 + \gamma_2 \leq 0, \quad \gamma_1 \geq \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

给出的区域和边界 (6.59) 示于图 6.6。可见, (6.59) 的第一组条件所确定的是具有 V 类轨道的边界 [见 (6.58)], 而第二组给定的却是具有由其它旋转顺序组成的同类轨道的边界。

后一论断是根据下列事实得出的, 即: VII 类轨道等价于 VI 类轨道, 因为对小角度旋转乘法是可易的:

能的界限,例如, $\Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4$ 表示 $\vartheta_2 < \vartheta_3$ 和 $\vartheta_4 < \vartheta_3$ 。将自由参数数目减小到 2 个的附加条件对应于区域边界,这已反映在表示的图中;例如,边界 $\Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4$ 对应于 $\vartheta_2 = \vartheta_3 > \vartheta_4$ 的轨道,它把区域 $\Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_1$ 和 $\Lambda_2 \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_4$ 分开。图 6.7 使我们能够用图说明在

定性研究时提到的有关运动区域和边界的全部位置。

图 6.7 中示出的运动区域,对应于矢量 \mathbf{p}_E “绕过”点 \mathbf{e}_3 (见图 6.2) 而在区域 \mathcal{A}_3 中运动时得到的轨道。正是这样的轨道,相应地 IV~VII 类轨道的区域存在于任何区域 \mathcal{A}_n 中。在任何情况下,仅在一个区域,例如 $\mathcal{A}_3 \mathcal{C}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2$ (图 6.8) 或这个区域的一半 $\mathcal{A}_3 \mathcal{C}_1 \mathcal{B}_2$

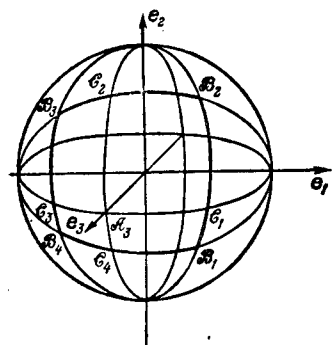


图 6.8

中,就足以确定运动区域的划分,因为球面的所有其它区域都相对于三边形和旋转速度矢量相同地排列着,所以,运动区域的划分与区域 $\mathcal{A}_3 \mathcal{C}_1 \mathcal{B}_2 \mathcal{C}_2$ 完全相同。

可以看出, V 和 VI 类轨道的区域和图 6.7 中表示的 IV 类的边界恰恰把这个区域完全覆盖起来。因此,整个球面均为 IV、V 和 VI 类所完全覆盖。由此可见, IV、V 和 VI 类轨道能使我们实现任意的小角度旋转。

我们求完成旋转的时间。角速度 ω_m 之值等于 $\sqrt{3}$; 由此可见,运动时间将等于各分运动所有各角之和除以 $\sqrt{3}$ 。利用 IV~VII 类中每一轨道所得之角度,我们得出:

$$\left. \begin{aligned} T_{IV} &= \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\sqrt{3}} = \vartheta_x \gamma_2 = \vartheta_x \gamma_3, \\ T_V &= \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3}{\sqrt{3}} = \vartheta_x \gamma_3, \\ T_{VI} &= T_{VII} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4}{\sqrt{3}} = \vartheta_x \gamma_3, \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

就是说, 在所有的轨道中, 旋转同一角度 ϑ_z 的运动时间, 在 Λ_z 位于点 \mathcal{A}_n 时为最大并等于 ϑ_z , 当 Λ_z 位于点 \mathcal{C}_1 时, 它等速地减小到 $\vartheta_z/\sqrt{2}$; 当位于 \mathcal{B}_m 时, 它就减小到 $\vartheta_z/\sqrt{3}$ 。

现在, 我们研究其它可能的轨道。球面上的点 (6.48) ~ (6.50) 对应于 I ~ III 类逗留点轨道。可以看出, 在这些轨道上的运动时间和 IV ~ VII 类轨道上的运动时间完全相同。就这个意义来说, 所有这些轨道都是最佳的而且可沿这两类轨道运动。

VIII 类轨道以及与之等价的 IX 和 X 类轨道 (由于小角度旋转的可易性), 对于小角度 ϑ_1 和 $\vartheta_{\varphi 1}$ 确定这样的运动 [根据 (6.54) 和 (6.56)]:

$$\Lambda_z = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \approx 1 + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_1 + \frac{e_1 + e_2}{2\sqrt{2}} \vartheta_{\varphi 1},$$

$$\gamma_1 \vartheta_z = \gamma_2 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_{\varphi 1}, \quad \gamma_3 \vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \vartheta_1,$$

由此可得

$$\vartheta_1 = \sqrt{3} \vartheta_z \gamma_3 \geq 0,$$

$$\vartheta_{\varphi 1} = \sqrt{2} \vartheta_z (\gamma_2 - \gamma_3) = \sqrt{2} \vartheta_z (\gamma_1 - \gamma_3) \geq 0.$$

这样的轨道存在于球面的下列曲线上:

$$\gamma_2 = \gamma_1 \geq \gamma_3,$$

而沿这种轨道的运动时间

$$T_{VIII} = T_{IX} = T_X = \frac{\vartheta_1}{\sqrt{3}} + \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{\sqrt{2}} = \vartheta_z \gamma_1 = \vartheta_z \gamma_2.$$

因为对称的边界 (图 6.8 中的曲线 $\mathcal{B}_2 \mathcal{C}_1$) 正是这样轨道的所在区域, 所以可以看出, 在这个边界上可能有恰恰是这样运动时间的 IV 类轨道。

我们研究 XI 类轨道。根据 (6.54) 和 (6.56), 对于小角度我们有

$$\begin{aligned} \Lambda_z = \Lambda_1 \circ \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \approx & 1 + \frac{e_1 + e_2 + e_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_1 \\ & + \frac{-e_1 + e_2 + e_3}{2\sqrt{3}} \vartheta_2 + \frac{e_1 + e_2}{2\sqrt{2}} \vartheta_{\varphi 1}, \end{aligned}$$

由此

$$\gamma_1 \vartheta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_{\varphi 1},$$

$$\gamma_2 \vartheta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \vartheta_{\varphi 1},$$

$$\gamma_3 \vartheta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vartheta_1 + \vartheta_2)。$$

我们解得关于旋转角的已知等式:

$$\vartheta_1 = \sqrt{3} \vartheta_2 (\gamma_3 + \gamma_1 - \gamma_2) = \sqrt{3} \vartheta_2 \gamma_3,$$

$$\vartheta_2 = \sqrt{3} \vartheta_2 (\gamma_2 - \gamma_1) = 0,$$

$$\vartheta_{\varphi 1} = \sqrt{2} \vartheta_2 (\gamma_2 - \gamma_3)。$$

给定轨道的所在区域决定于条件:

$$\gamma_3 \geq 0, \quad \gamma_2 = \gamma_1, \quad \gamma_2 \geq \gamma_3。$$

该区域示于图 6.9。显然, 它是 V 类轨道区域的边界 (这是矢量 p_E 在区域 \mathcal{A}_2 中运动时得到的区域 $\Lambda_5 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_2$)。IX 类轨道上的运

动时间等于

$$T_{XI} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\sqrt{3}} + \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{\sqrt{2}} = \vartheta_2 \gamma_2,$$

就是说, 和 V 类轨道上的运动时间相同 [见 (6.60)]。

小角度的 XII~XIV 类轨道是不存在的, 因为对它们来说,

$$\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}。$$

这样, 就可求出存在小角度最佳旋转的所有区域。

现在我们来回答最后一个问题: 求出的最佳方程与四元数分量的控制方程 (6.37) 有多大差别? 假定 Λ_2 位于粗线弧所限定的区域 (见图 6.7)。可以看出, 矢量 Λ_2 通过立方体 (6.43) 的一个面相当于这一情况。在这种情况下, 对于控制 (6.37) 来说, 最大角速度之值将等于 $\omega_{x3}/\gamma_3 = 1/\gamma_3$, 由此可以得出, 在这样的控制作用

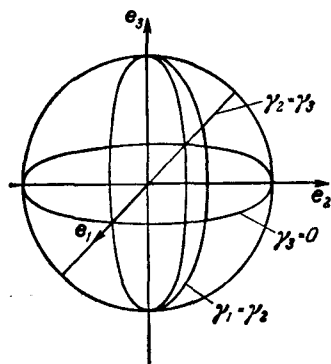


图 6.9

下, 旋转角度 ϑ_z 的时间将等于 $T = \gamma_3 \vartheta_z$, 就是说, 与最佳旋转 (6.60) 的时间完全相同。

这样一来, 在小角度旋转情况下的一次近似中, 对于 (6.44) 这类限制的控制 (6.37) 是最佳的。如果考虑到二阶微量, 则所研究的最佳旋转仍比 (6.37) 这类旋转“短些”。下面将证明, 大角度时这一差别将是显著的。

任意角度的旋转

正如在小角度旋转的例子中指出的, 解题过程归结为绘出球面上各类轨道的所在区域并确定最佳的充分条件。各分旋转的角度为任意的情况, 实质上是比较复杂的而且不能用解析法求解。在任何情况下, 都可建立表达合成四元数 λ_{3i} ($i=0, 1, 2, 3$) 的量以及对每一类轨道各分旋转的角函数的方程, 但是, 这些等式的逆运算不是任意情况都能成立。为了解算问题, 我们采用区域边界作图法。区域的每一边界都决定于, 第一次和最后一次旋转具有其最大值或最小值。这时, 对于任何一类运动来说, 自由参数数目不超过两个。解是通过用数字计算机计算下述问题的方法确定的: 一个参数 (一次旋转角) 取固定值, 第二个参数的选取, 应保证所要求的合成旋转角 ϑ_z , 这样就确定出球面上的一个点。使第一个参数 (第一次旋转角) 从最小值变到最大值, 我们便得出球面上的弧线——区域边界。对等于 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ 和 π 的四个角度进行了计算。解题的结果, 以球面上区域的形式 (其符号与图 6.7 中示出的相似) 示于图 6.10~6.15。在所有各图中, 半球面都展成平面; 对称区域的边界都以虚线表示。

图 6.10 中示出了角 $\vartheta_z = \frac{\pi}{3}$ 这一情况的区域。正象从图中看到的, 对于这样的旋转, 尤其是 V 类轨道, 当矢量 \mathbf{p}_{E0} 在区域 \mathcal{A}_3 内时存在有最大区域。图中示出了这些区域的边界, 其一边由 IV 类轨道组成, 而另一边将这一区域同 VI 类轨道分开。VI 类轨道沿坐标轴占有狭小的区域; VII 类轨道的边界靠近中心 (\mathbf{e}_3); 还示

出了闭循环的轨道。正象从图中看到的,在循环内及其边界上,同时存在 VI 类轨道以及由许多分段组成的轨道 (VII 类轨道、闭循环等等)。但是计算证明,这样的假设总的说来是成立的:

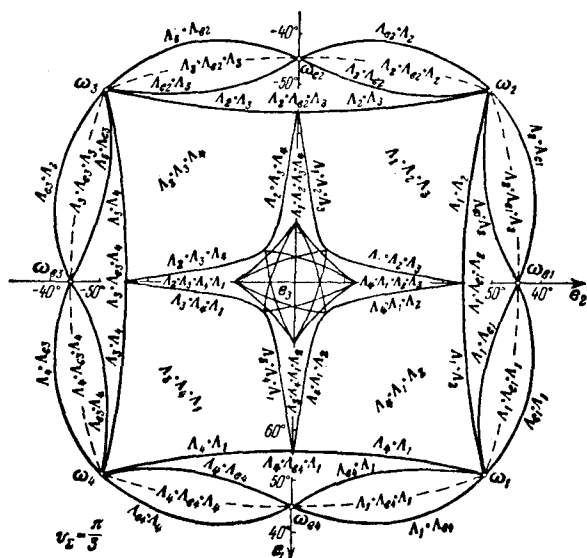


图 6.10

(4) 由少数分段组成的轨道是最佳的。

在 V 类轨道外面,某些区域为矢量 p_{E0} 位在分隔线上时得到的轨道,即为 VIII, IX 和 IV 类轨道所定的 X 和 XI 类轨道占有。可以看出,处处都可实现一类运动向另一类运动的连续转换。

随着旋转角 ϑ_2 ($\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$, 见图 6.11; $\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$, 见图 6.12) 的增大,区域 \mathcal{A}_3 中矢量 p_E 的运动所确定的区域开始减小,而分隔线的区域开始扩大(注意,在小角度的情况下,后一种区域一般是不存在的)。这时,首先出现 VI 类轨道区的减小,而后它们又重新扩大。角 $\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$ 是 V 类轨道区域收缩于点 ω_m 的极限角。但是,当 $\vartheta_2 \leq \frac{2\pi}{3}$ 时, XII~XIV 类轨道是不存在的。

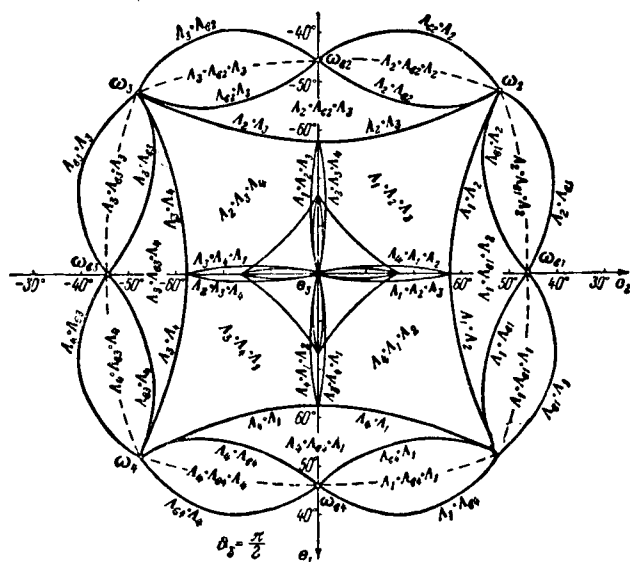


图 6.11

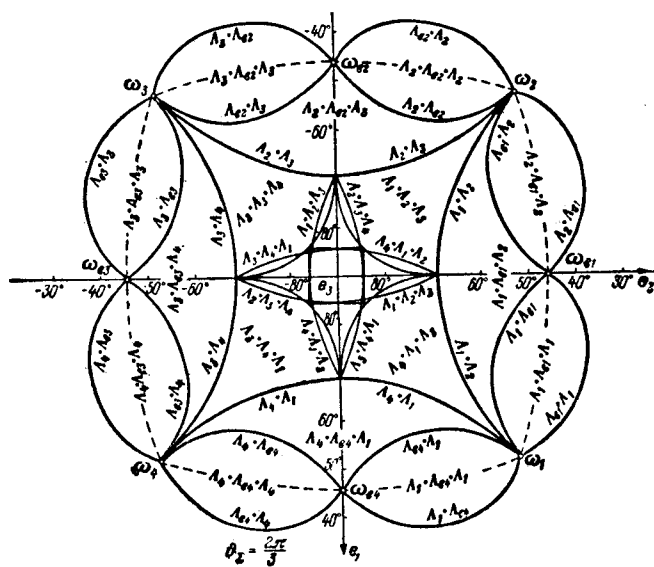
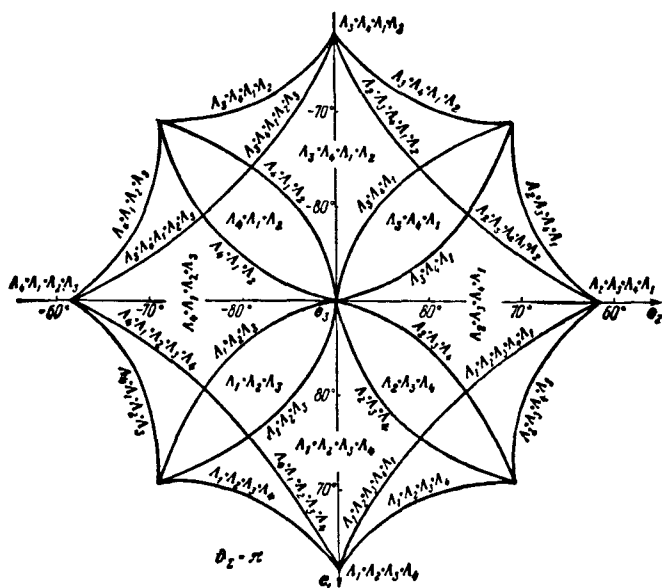


图 6.12

角 $\theta_2 = \pi$ 的轨道占有特殊位置。图 6.13 示出了矢量 \mathbf{p}_{E0} 在区域 \mathcal{A}_3 中时得到的区域。正象从图中看到的, VI 类轨道的区域有了进一步扩大, 而 V 类轨道的区域进一步收缩, 甚至出现了 VII 类轨道区域。闭循环的轨道区域变为最大, 整个说来, 这一类轨道区域大大地缩小了。另一方面, 在图 6.14 中示出了矢量 \mathbf{p}_E 沿分隔线运动时得到的轨道区域。正象从图中看到的, 这些区域覆盖着整个球面。该图中没有示出 XIII 和 XIV 类轨道区域 (这些轨道的一个边界示于图 6.15), 因为, 原来, 首先是轨道的所在区域完全为 XI 类轨道区域覆盖, 其次是 XI 类轨道“短”于 XIII 和 XIV 类轨道, 就是说, 假设 (4) 对于这些轨道也是成立的。



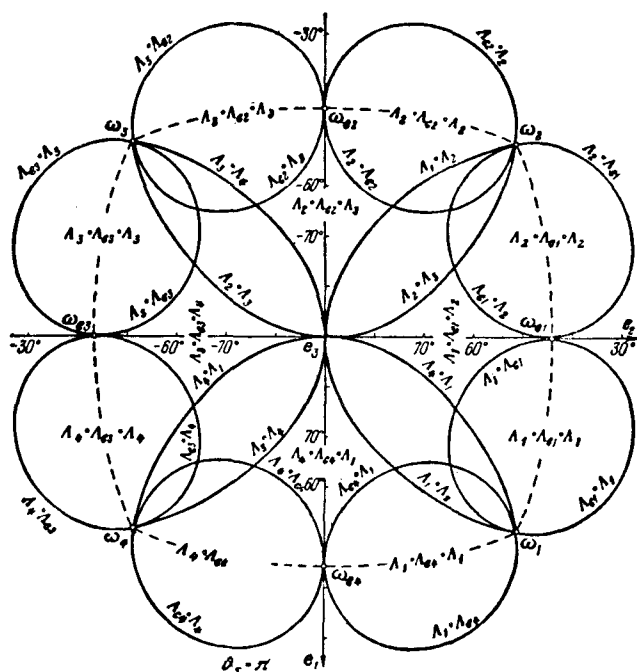


图 6.14

最后, 我们研究这样一个问题: 所作出的最佳控制同 (6.37) 这种类型的四元数分量的控制有多大差别? 可以看出, 在所有的情况下, 在点 ω_m 和 ω_{gl} 最佳控制和 (6.37) 完全相同。分析表明, 在其它各点上, 最佳控制“短些”。(6.37) 控制的转弯时间与最佳转弯时间之差, 在点 ω_n 达到了最大值 (在任何给定角 θ_2 的情况下)。该点上的这个差, 以角度 θ_2 函数的形式随着这个角的增加而增大, 从而在 $\theta_2 = \pi$ 时达到最大值。这种情况下的最佳转弯决定于 IV 类轨道, 它的两个分旋转都有 $\frac{2\pi}{3}$ 这样一个角度, 就是说, 总转角等于 240° 。但因旋转是以速度 $|\omega_m| = \sqrt{3}$ 进行的, 所以转弯时间

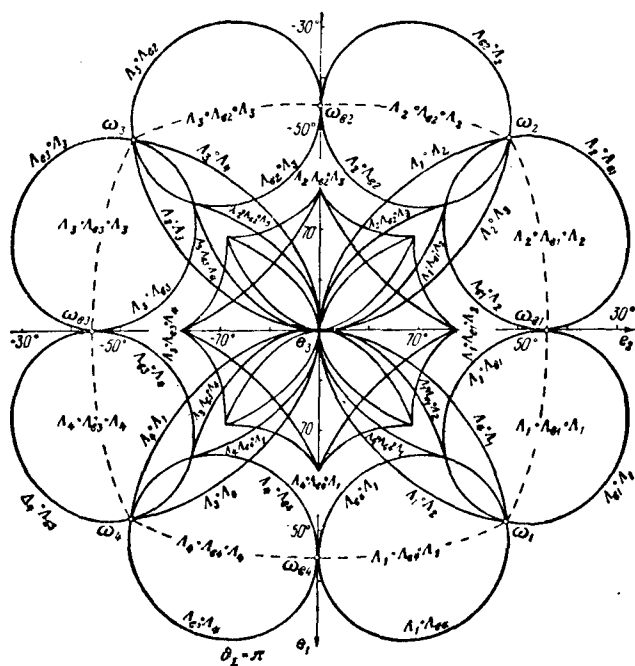


图 6.15

$$T_{\Sigma} = \frac{240^\circ}{\sqrt{3}} \approx 139.8^\circ < 180^\circ.$$

§ 6.5 动力学最佳转弯问题的提出

在动力学最佳转弯问题中假定，作用在刚体上的外力矩的量是控制函数。附加有运动学方程的动力学方程是刚体的运动方程。我们将研究刚体相对于固定坐标系 I 的旋转运动，坐标系的原点位于刚体的质心。欧拉方程(5.51)将是运动的运动学方程。

我们将认为控制 $\mathbf{M} \{M_1, M_2, M_3\}$ 是有界的并属于某一闭域 \mathbf{M} 。

$$\mathbf{M} \{M_1, M_2, M_3\} \in \mathbf{M}. \quad (6.61)$$

方程(5.51)确定的角速度值可给出为方程(6.1)所描述的刚体运

动的运力学。为了完全地描述运动情况,必须给定刚体位置运动的边界条件:

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \Lambda(T) = \Lambda_T, \quad (6.62)$$

式中, 0 和 T 是运动的开始和终止时刻。下式是速度的边界条件:

$$\omega(0) = \omega_0, \quad \omega(T) = \omega_T, \quad (6.63)$$

式中, ω_0 和 ω_T 是某个希望有的容许值[就这样的意义来说的, 即: 在控制的有界域(6.61)内, 它们是可以达到的]。

$$\omega_0 = \omega_T = 0 \quad (6.64)$$

的问题, 即刚体从一固定位置转向另一固定位置的问题具有实际意义。

为全面完成问题的讨论, 必须引进最佳准则。我们将研究问题的两种提法: 快速作用的动力学最佳转弯和所谓的“消耗”量最佳转弯。在第一种情况下, 要求转弯时间 T 为最小; 在第二种情况下, 当转弯时间 T 固定时, 要求

$$G = \int_0^T \left(\frac{|M_1|}{r_1} + \frac{|M_2|}{r_2} + \frac{|M_3|}{r_3} \right) dt, \quad (6.65)$$

的值为最小, 式中 r_1, r_2, r_3 是某些长度, 它们具有产生相应力矩 M_i 的反作用推力力臂的涵义。 G 的大小等于喷气发动机推力的总冲量并决定控制系统完成转弯所耗费的燃料消耗量。在 $r_i = 1$ 的特殊情况下, G 的大小决定力矩的总冲量。看来, 提出一个取这个量为最小值的问题, 是可以的。

在给定初始条件(6.62)、(6.63)和控制函数 $M_i(t)$ ($i=1, 2, 3$) 的情况下, 动力学方程(5.51)同(6.1)一起具有唯一解(轨道)。显然, 并不是在所有可能的控制函数作用下, 轨道都能达到 Λ_T 和 ω_T [见(6.62)和(6.63)]所确定的终端。我们将认为, 总是存在着属于集(6.61)的控制函数 $M_i(t)$ 的子集, 对于这一子集来说, 系统的运动轨道满足边界条件(6.62), (6.63)。问题在于: 从所有可能的容许控制中, 找出所选控制性能准则: 时间 T 或冲量 G 之值最小的控制。为了求出最佳控制条件, 我们利用公式化了的庞特里雅金最大值原理^[6, 42]。

为使最佳化问题的两种提法具有同样的解题方法, 我们将推力冲量的最佳化情况化为快速作用的最佳化情况, 其方法是把由最佳准则(6.65)得出的补充方程

$$\dot{G} = \frac{|M_1|}{r_1} + \frac{|M_2|}{r_2} + \frac{|M_3|}{r_3} \quad (6.66)$$

加到运动方程中。显然, 初始值 G 等于零, 终端值没有固定, 并且控制应使它具有最小值。

我们引入对应于变量 ω_1 、 ω_2 和 ω_3 的辅助函数 φ_1 、 φ_2 和 φ_3 , 对应于坐标 λ_i 的函数 ψ_i ($i=0, 1, 2, 3$) 以及对应于 G 的函数 g 。借助这些函数作出哈密顿函数

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_P = \langle \dot{\varphi} \dot{\omega} \rangle + \langle \dot{\lambda} \dot{\psi} \rangle + \langle \dot{G} g \rangle \\ &= \varphi_1 \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 \right) + \varphi_2 \left(\frac{M_2}{J_2} + \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_1 \omega_3 \right) \\ &\quad + \varphi_3 \left(\frac{M_3}{J_3} + \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2 \right) + \mathcal{H}_K + g \left(\frac{|M_1|}{r_1} + \frac{|M_2|}{r_2} + \frac{|M_3|}{r_3} \right), \end{aligned} \quad (6.67)$$

式中, 哈密顿函数分成“动力学” \mathcal{H}_A 、“运动学” \mathcal{H}_K 和“消耗量” \mathcal{H}_P 函数。

在 § 6.2 中研究的最佳转弯运动学问题的哈密顿函数 (6.6) 就是 $\mathcal{H}_K = \frac{1}{2} (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3)$ 。它可通过运动学共轭控制矢量表示。在快速作用控制的问题中, 关系式 (6.67) 中没有最后一项 \mathcal{H}_{P0} 。

辅助变量决定于方程

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_k &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_k} \quad (k=1, 2, 3), \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_i} \quad (i=0, 1, 2, 3), \\ \dot{g} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}. \end{aligned}$$

我们分别写出各组变量的这些方程。我们有确定函数 φ_k 的下述方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \varphi_2 \frac{J_1 - J_3}{J_2} \omega_3 + \varphi_3 \frac{J_2 - J_1}{J_3} \omega_2 - \frac{1}{2} p_1, \\ \dot{\varphi}_2 &= \varphi_1 \frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_3 + \varphi_3 \frac{J_2 - J_1}{J_3} \omega_1 - \frac{1}{2} p_2, \\ \dot{\varphi}_3 &= \varphi_1 \frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_2 + \varphi_2 \frac{J_1 - J_3}{J_2} \omega_1 - \frac{1}{2} p_3, \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

式中, p_k 之值是预先引入的量(6.15)——共轭矢量 \mathbf{p}_E 的投影。

既然运动学变量 λ_i ($i=0, 1, 2, 3$) 只包含在运动学的哈密顿函数 \mathcal{H}_κ

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}_\kappa}{\partial \lambda_i}$$

中, 所以, 变量 ψ_i 的方程将是先前得到的运动学问题的方程(6.8)和(6.13)。

最后, 对于发动机推力冲量的最佳化情况来说, 我们有变量 g 的下列方程:

$$\dot{g} = 0. \quad (6.69)$$

在转弯时间最佳化的情况下, 这种方程是不存在的。

最佳控制的必要条件是: 控制 \mathbf{M}_k ($k=1, 2, 3$) 应使哈密顿函数 \mathcal{H} 在容许控制集(6.61)中达到最大值。因为控制仅含于哈密顿函数的第一(“动力学”)和第三(“消耗量”)项中, 所以这一条件可表为:

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}\{\mathbf{M}_k(t), \omega_k(t), \lambda_i(t), G(t), \varphi_k(t), \psi_i(t), g(t)\} \\ &= \max_{\mathbf{M}_k \in \mathbf{M}} \mathcal{H}\{\mathbf{M}_k, \omega_k(t), \lambda_i(t), G(t), \varphi_k(t), \psi_i(t), g(t)\} \\ &= \max_{\mathbf{M}_k \in \mathbf{M}} \mathcal{H}_\pi(\omega_k, \varphi_k, \mathbf{M}_k) + \max_{\mathbf{M}_k \in \mathbf{M}} \mathcal{H}_p(\mathbf{M}_k, g, G). \end{aligned} \quad (6.70)$$

在消耗量最小问题的提法中, 如果转弯时间 T 固定, 这些条件还必须补充到终端时间 T 应该成立的下列关系式(见 [6], § 8, 定理 6):

$$g(T) = -1. \quad (6.71)$$

列出的关系式, 原则上, 足以解决提出的问题。实际上, 最大值条件(6.70)以 ω_k 和辅助变量 φ_k 和 g 的函数形式确定控制。形

式上利用最大值条件, 以 φ_k 和 g 来表示控制函数 M_k , 便得出 14 个一阶微分方程 (5.51)●、(6.68)、(6.1)、(6.8) (G 和 g 的方程未算在内) 的封闭系。这些微分方程以必要数目的边界条件 (6.62)、(6.63) 和 (6.71) 就能确定出函数 ω_k 、 λ_i 、 φ_k 、 ψ_i 、 g ($i=0, 1, 2, 3$; $k=1, 2, 3$)。给出的函数 φ_k 和 ψ_i 的常数应该这样选择, 即使轨道 $\{\omega_k, \lambda_i\}$ 从初始点 (6.62)、(6.63) 出发, 最后通过给定的终点。

在快速作用最佳控制的情况下, 控制 M_k ($k=1, 2, 3$) 仅仅决定于哈密顿函数中动力学部分的最大值条件:

$$\max_{M_k \in \mathbf{M}} \mathcal{H} = \max_{M_k \in \mathbf{M}} \mathcal{H}_\pi(M_k, \omega_k, \varphi_k) \quad (6.72)$$

这个条件本身就以 ω_k 和 φ_k 的函数形式给定了控制, 而这一关系的形式决定于控制集 \mathbf{M} 的构形。

在推力冲量控制最佳化的情况下, 根据 (6.69) 和 (6.71), 我们有

$$g(t) = -1。$$

从这一点出发, 最佳控制将从函数的最大值条件

$$\max_{M_k \in \mathbf{M}} \mathcal{H} = \max_{M_k \in \mathbf{M}} \left\{ \mathcal{H}_\pi(M_k, \omega_k, \varphi_k) - \frac{|M_1|}{r_1} - \frac{|M_2|}{r_2} - \frac{|M_3|}{r_3} \right\} \quad (6.73)$$

中, 求出并且由依赖于转弯时间 T 的较为复杂的关系式来确定 (这一点将在下面证明)。

方程组 (5.51) 和 (6.68) 是非线性方程组, 因此, 即使得到了控制 M_k 为 φ_k 和 ω_k 的函数的直接表达式, 仍然不能得到方程的解。另外, 如果从条件 (6.73) 出发, 那么, 它仅仅在函数 φ_k 和 ω_k 已知 (已求出) 时才有可能解的。还应该考虑到, φ_k 的方程中包含以运动方程的解的函数形式确定的量 p_k , 而运动方程的解也不能用初等函数表示成通解的形式。由此可以清楚地看出求解动力学最佳转弯问题的一切主要困难。

● 原书误为 (6.51), ——校者

§ 6.6 控制力矩的模有界时, 对于球对称刚体动力学最佳转弯问题的解的特殊情况

看来, 这种情况是唯一用解析法可解的, 因为在球对称刚体的情况下, $J_1 = J_2 = J_3 = J$, 而且非线性方程 (6.68) (应该考虑到, ω_k 的最大值条件被确定为 φ_k 的函数) 变成为线性微分方程。此外, 对称刚体这种特殊情况的解也是有意义的, 即: 使我们能够彻底地探索所提问题的全部特点并用图充分说明运动学问题所得解的作用。

对于所研究的情况来说, 哈密顿函数 (6.67) 具有这样形式:

$$\mathcal{H} = \varphi_1 \frac{M_1}{J} + \varphi_2 \frac{M_2}{J} + \varphi_3 \frac{M_3}{J} + \mathcal{H}_k - |M_1| - |M_2| - |M_3| \quad (6.74)$$

(我们取 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$)。

欧拉动力学方程 (5.51) 和辅助函数 φ_k 的方程 (6.68) 简化为:

$$\dot{\omega}_k = \frac{M_k}{J}, \quad \dot{\varphi}_k = -\frac{1}{2} p_k \quad (k=1, 2, 3)。 \quad (6.75)$$

在这里还应将 λ_i 的运动学方程 (6.1) 和以函数 λ_i 和 ψ_i ($i=0, 1, 2, 3$) 的形式确定 p_k 的关系式 (6.15) 补充进来。利用关系式 (6.20), 以四元数的形式写出这些方程:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \omega_E, \quad p_E = \tilde{\Lambda} \circ p_{E0} \circ \Lambda, \quad (6.76)$$

式中, p_{E0} 是共轭矢量的初始值, 而 p_E 是四元数 (6.15)。

我们首先研究快速作用控制最佳化的情况并讨论这一情况的最大值条件 (6.72)。我们引入下列矢量 (和四元数):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} &= M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3, \\ \boldsymbol{\varphi} &= \varphi_1 \mathbf{i}_1 + \varphi_2 \mathbf{i}_2 + \varphi_3 \mathbf{i}_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

我们看到, 如果超复数基同基 E 重合, \mathbf{M} 就是固连轴上的控制力矩矢量。考虑到 (6.77), 最大值条件 (6.72) 写成这种形式:

$$\max \mathcal{H} = \max_{\mathbf{M} \in \mathbf{M}} [\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{M}]。$$

在容许控制区域为球 (力矩的模是有界的) 的特殊情况下, 由

最大值条件我们得到这样的控制函数有界表达式:

$$\mathbf{M} = \mu \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.78)$$

在这里 μ 是规范化系数, 它等于 $M_{\max}/|\boldsymbol{\varphi}|$, 其中 M_{\max} 是力矩的模的最大值。这一关系式只以辅助变量 φ_k 的函数表示控制: 力矩 \mathbf{M} 之值应该取最大值, 它的方向应指向矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的方向。矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 由 (6.75) 的第二个方程确定为矢量 \mathbf{p}_E 的函数, 矢量 \mathbf{p}_E 由关系式 (6.76), 以 $\boldsymbol{\omega}_E$ 的函数表示。

利用式 (6.77) 并考虑到由条件 (6.78) 确定的控制, 我们可把 (6.75) 式写成矢量的形式:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_E = \frac{\mu}{J} \boldsymbol{\varphi} = \frac{M_{\max}}{J} \frac{\boldsymbol{\varphi}}{|\boldsymbol{\varphi}|}, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{1}{2} \mathbf{p}_E. \quad (6.79)$$

所得方程同方程 (6.76) 一起给出微分方程的封闭系, 它应该唯一地满足边界条件 (6.62) 和 (6.63)。

应该注意, 以矢量形式写出的方程 (6.79) 是等式 (6.75) 的形式表示法, 因此, 导数 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_E$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ 在这里是局部导数 (所取导数没有考虑基 \mathbf{E} 的运动)。

我们讨论所得方程组任意常数的选择以及它们同问题的边界条件间的关系。因为矢量等式 (6.79) 是标量关系式的形式写法, 所以形式上可对微分关系式 (6.79) 积分:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_E &= \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{M_{\max}}{J} \int_0^t \frac{\boldsymbol{\varphi}}{|\boldsymbol{\varphi}|} dt', \\ \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{\varphi}_0 - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{p}_E dt', \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

式中, $\boldsymbol{\omega}_0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 分别为 $\boldsymbol{\omega}_E$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 的初始值。

从所得写法中可以得出, 在选择等于相应边界条件的角速度初始值时, 应满足 (6.63) 的第一个条件。可以想象, (6.63) 的第二个条件可通过适当选择初始矢量 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 的方法予以满足。在求解对应于初始四元数 Λ_0 的运动学方程的过程中, 也就自动地选出了 (6.62) 的 (初始) 条件。四元数 Λ_T 的终值通过初始矢量 \mathbf{p}_{E0} (6.76)

的适当选择应该得到满足。

这样一来,得到的封闭方程组应该有由九个常数(ω_E 、 φ 和 p_E 中的每一矢量为三个常数)确定的解,这同问题的边界条件完全一致。

我们转而分析所得到的方程组。矢量 p_E 是作为运动学方程的解得出的。求(6.76)的第二个关系式的微分,我们得到描述这一矢量运动的微分方程:

$$2\dot{p}_E = p_E \circ \omega_E - \omega_E \circ p_E. \quad (6.81)$$

可以看出,方程式(6.79)和(6.81)恰恰构成三个一阶矢量微分方程的封闭系(即九个标量方程的方程组)。但是,这些方程是非线性的,它们含有三个变量 ω_E 、 φ 和 p_E 而且即使把这些方程简化为一个变量,求解它们也是十分困难的。

考虑到,矢量等式(6.79)是标量关系式的形式写法,求该方程组第二个方程的微分:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{2} \dot{p}_E \circ$$

在(6.81)中用 $\dot{\varphi}$ 代换 p_E ,之后再将其结果代入所得等式中。这样,我们将有对应于方程组(6.79), (6.81)并仅仅含有两个变量的方程组:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_E &= \frac{M_{\max}}{J} \frac{\varphi}{|\varphi|}, \\ 2\ddot{\varphi} &= \dot{\varphi} \circ \omega_E - \omega_E \circ \dot{\varphi} = 2\dot{\varphi} \times \omega_E. \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

研究所得方程组的通解是不可能的,因此我们只能指出一个特解。假定矢量 ω_E 平行于矢量 $\dot{\varphi}$,即平行于矢量 p_E ,这意味着,矢量的导数与矢量 φ 方向相同。根据等式(6.81)可知,等式

$$p_E = p_{E0}$$

应该成立,而矢量 ω_E 应具有不变的方向。从(6.80)的第二方程得出

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2} p_{E0} t + \alpha, \quad (6.83)$$

式中, α 是常值矢量, 且因为矢量 ω_E 也应与矢量 p_E ●, 即矢量 p_{E0} 方向相同, 所以矢量 α 应该与矢量 p_{E0} 共线。这样, 函数 $\varphi(t)$ 对于所研究的情况来说就是线性的而且只能改变一次符号。由于这些, 根据(6.78)可知控制力矩的方向是不变的, 它的值取最大值, 而且它在整个运动轨道上只能改变一次符号。

函数 $\varphi(t)$ 的单位矢量与矢量 p_{E0} 重合, 利用(6.80)的第一个解, 对于角速度函数, 我们得到

$$\omega_E = \omega_0 + \frac{M_{\max}}{J} p_{E0} \begin{cases} \pm t, & \text{当 } 0 \leq t \leq \tau_1 \text{ 时} \\ \pm (2\tau_1 - t), & \text{当 } \tau_1 \leq t \leq T \text{ 时} \end{cases} \quad (6.84)$$

式中 T 是运动的时间区域, 而 τ_1 是函数 $\varphi(t)$ 改变符号的时刻。从所得等式中看出, ω_0 是角速度的初始值, 它不能是任意的, 而应该与矢量 p_{E0} 的方向相同; 终端值 ω_T 也同样决定于这个方向。由此可以得出这样的结论: 所研究的方程组(6.82)的特解, 仅仅对于某些边界条件(6.63)才能成立, 即对于初速度和末速度的矢量具有矢量 p_{E0} 的方向这样的条件才能成立。边界条件(6.63)的数目相应地从 6 个减小到 2 个(就是说, 仅由 ω_0 和 ω_T 给定)。但是应该指出, 这样的特殊情况具有实际意义, 而边界条件(6.64)正是这样的情况。因此, 边界条件(6.62)和(6.63)的数目从 9 个减少到 5 个: (6.62)的三个条件用于旋转角和旋转方向, (6.63)的两个条件用于初速度和末速度。所得解的常数数目也等于五: 三个常数确定 p_{E0} 和 α (即旋转矢量的方向和速度符号改变的时刻), 而各用一个常数来确定 ω_0 和 ω_T 。

$\omega_E(t)$ 变化的特性示于图 6.16。随着最大加速度的作用速度不断地增加, 转弯时间 T 在这里没有固定, 它应由转角的大小来确定。对于方向不变的速度矢量的情况来说, 运动学方程的解是已知的。以(6.84)这种形式表示 $\omega_E(t)$, 我们有

● 原书误为 ω_E 。——校者

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(t) &= \Lambda_0 \circ \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}_{E0} \left[\omega_0 t \pm \frac{M_{\max}}{J} \frac{t^2}{2} \right] \right\} \\ &\quad \text{当 } 0 \leq t \leq \tau_1 \text{ 时,} \\ \Lambda(t) &= \Lambda_0 \circ \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}_{E0} \left[\omega_0 t \pm \frac{M_{\max}}{J} \left(2\tau_1 t - \tau_1^2 - \frac{t^2}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad \text{当 } \tau_1 \leq t \leq T \text{ 时.} \end{aligned} \right\} \quad (6.85)$$

时间 T 内总的旋转角为

$$\vartheta = \omega_0 T \pm \frac{M_{\max}}{J} \left(2\tau_1 T - \tau_1^2 - \frac{T^2}{2} \right); \quad (6.86)$$

它应该借助于, 例如,

$$2\vartheta = \arccos [\text{sqal}(\Lambda_0 \circ \Lambda_T)]$$

这样的关系式, 由四元数 $\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T$ 6.46 来确定。旋转方向, 即矢量 \mathbf{p}_{E0} 决定于 (6.85) 的矢量部分:

$$\mathbf{p}_{E0} = \text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) / \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (6.87)$$

显然, 所研究的特殊情况是描述刚体从初始位置到终端位置的平面转弯的。将所得的解 (6.84)、(6.87) 同运动学问题的解 (6.35) 加以比较是很有意思的。从比较中看出, 正是这种特殊情况下的控制给出了由四元数 $\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T$ 确定的平面转弯。

T 和 τ_1 的值由解 (6.84) 和 (6.86) 确定:

$$\left. \begin{aligned} \omega_T - \omega_0 &= \mp \frac{M_{\max}}{J} (T - 2\tau_1), \\ \vartheta - \omega_0 T &= \mp \frac{M_{\max}}{J} \left[\frac{T^2}{2} - (T - \tau_1)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

条件 (6.88) 简化为 τ_1 或 T 的二次代数方程, 而且这一方程的两个根中只有一个有意义。 T 和 τ_1 不同的值对应于解 (6.88) ● 中的两个符号。对于上面一个符号,

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 \sqrt{\frac{J^2}{M_{\max}^2} (\omega_T^2 + \omega_0^2) + \frac{J}{M_{\max}} \vartheta} - \frac{J}{M_{\max}} (\omega_0 + \omega_T), \\ \tau_1 &= \sqrt{\frac{J^2}{M_{\max}^2} (\omega_T^2 + \omega_0^2) + \frac{J}{M_{\max}} \vartheta} - \frac{J}{M_{\max}} \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

同关系式(6.88)的下一符号对应的是这样的值:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{J}{M_{\max}} (\omega_0 + \omega_T) - 2\sqrt{\frac{J^2}{M_{\max}^2} (\omega_0^2 + \omega_T^2) - \frac{J}{M_{\max}} \vartheta}, \\ \tau_1 &= \frac{J}{M_{\max}} \omega_0 - \sqrt{\frac{J^2}{M_{\max}^2} (\omega_T^2 + \omega_0^2) - \frac{J}{M_{\max}} \vartheta}. \end{aligned} \right\} (6.90)$$

这两个解反映从点 ω_0 到点 ω_T 的两条路径(见图 6.16)。当初始角速度和终端角速度为零时,只能有解(6.89)。显然,与这一情况对应的是这样的运动:在运动的一半时间内力矩作用于所需转弯方向的一方,而在另一半时间内则作用于相反的一方。根据(6.88),在这种控制下实现转弯的角度

$$\vartheta = \frac{M_{\max}}{J} \frac{T^2}{4},$$

而最大角速度

$$\omega_E = \frac{M_{\max}}{J} \frac{T}{2}.$$

解(6.90)仅仅在有异于零的初始角速度和终端角速度时才有意义,而且显而易见,为使解(6.90)存在,应该满足不等式

$$\omega_0^2 + \omega_T^2 > \frac{M_{\max}}{J} \vartheta.$$

此时,控制特性可能完全不同:运动开始时的控制力矩可能具有与所需转弯方向相反的作用方向(见图 6.16)。

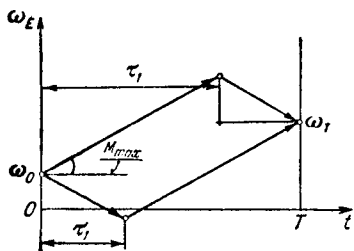


图 6.16

在任何情况下,都存在着解的非唯一性,其原因,首先是旋转 ϑ 或 $2\pi - \vartheta$ 这样一个角度都是可能的,其次是由于存在有边界条件,对于这些条件来说,解(6.89)或(6.90)都有意义。

显然,始终应该从一切容许解中选出那些运动时间 T 最短的解。如果我们只是没有速度为零的边界条件(6.64),则回答解的唯一性这个问题也不是没有意思的。在下面的情况下,解是精确

唯一的解(6.90)是不存在的,而应从 θ 和 $2\pi-\theta$ 中选出小于 π 的角度。一般情况的研究也是十分有趣的,它可以根据所得关系式进行。在这里将不介绍这种研究,因为它会把我们从叙述的主题引到细微末节上去。

现在我们转向另一个最佳准则——转弯时间 T 固定时控制力矩的冲量最佳化的讨论。这种情况的哈密顿函数的最大值条件 \mathcal{H} (6.73)所决定的控制力矩和函数 $\varphi(T)$ 之间的关系,较之情况(6.72)时的这种关系更为复杂。可以看出,如果

$$\mathcal{H} = \frac{1}{J} \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \sum_{i=1}^3 |\mathbf{M}_i| > 0,$$

即

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varphi} > J \sum_{i=1}^3 |\mathbf{M}_i|, \quad (6.91)$$

决定最大值条件 \mathcal{H} 的关系式则与情况(6.72)时的相同。但若不等式(6.91)被破坏,则在零控时

$$\mathbf{M}_i \equiv 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

才能达到最大值(非负的)。

因此,运动应该由最大力矩作用的分段以及自由运动的分段组成。可以看出,在控制力矩不是零的各分段上,确定最佳控制的关系式将与转弯时间最佳化问题时的关系式完全相同:控制力矩决定于关系式(6.78),刚体运动和函数 φ 的变化决定于关系式(6.79),而运动的运动学由等式(6.76)描述。由此可见,所得快速作用最佳化问题的解完全适用于所述问题中的个别运动段。其它运动段的控制力矩应该为零,就是说,应该是刚体的自由运动段。球对称刚体的自由运动段将是这样的:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_E(t) &= \boldsymbol{\omega}_E(\tau_0), \\ \Lambda(t) &= \Lambda(\tau_0) \circ \exp \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_E(\tau_0) (t - \tau_0) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.92)$$

式中, τ_0 相当于自由运动的开始时刻。

上面得到的关系式(6.84)、(6.85)以及等式(6.92),对于分析运动是完全够用的。应该指出,确定运动的参数数目增加了一个

(已知固定的转弯时间)。与之对应的是给定从一运动段到另一运动段转换时刻的补充条件(6.91)。在控制力矩不为零的运动段上,象在前一种情况下一样,我们将讨论矢量 $\dot{\varphi}$ 与矢量 φ 同向运动的特殊情况。在这种情况下,矢量 $\omega_E(t)$ 和 $p_E(t)$ 保持不变的方向。显然,在向另一运动段,即零控制力矩运动段转换时,下一步运动由关系式(6.92)描述,从这一式子可以看出,角速度矢量 ω_E 保持着自己的位置。根据这一点,当转换到自由运动段时,旋转四元数 $\Lambda(t)$ 的方位不变,可见,矢量 $p_E(t) = p_{E0}$ 保持不变。由此可以得出,在所有运动段上,函数 $\varphi(t)$ 都由同一方程描述而且没有间断现象,就是说,解(6.83)对于所有运动段都是正确的。

因为函数 $\varphi(t)$ 随着时间作线性变化,所以在通过零点时,不等式(6.91)只被破坏一次:当 $\mathbf{M} \cdot \varphi$ 位在边为 $M_i \left(\sum_{i=1}^3 |M_i| \right)$ 的立方体内时。此时,根据初始条件的不同可能有这样的运动情况:

(a) 最大力矩的运动、自由运动段、相反符号的最大力矩的运动;

(6) 最大力矩的运动、自由运动段;

(B) 自由运动段、最大力矩的段。

每一运动段上的角速度 ω_E 的变化都决定于关系式(6.84)以

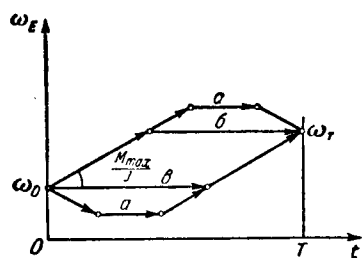


图 6.17

及(6.92)的第一等式。与运动情况有关的角速度的变化特性示于图 6.17。从图中可以看出,情况(6)和(B)仅在 $\omega_0 \neq \omega_r$ 时能够存在,而每一种情况都有一个唯一轨道。情况(a)可用两种方法实现,它们对应于初始控制力矩的不同符号。此

外,当运动时间 T 满足一个等式(6.89)或(6.90)时,情况(a)可能退化为没有自由段的运动或者在满足关系式

$$\vartheta = \omega_0 T = \omega_r T \quad (6.93)$$

时,它退化为只有自由段的运动。

在所讨论的问题提法中,使力矩冲量达到最小,从而使具有最大控制力矩的运动段的时间为最小值。从图 6.17 中可以得出,在所有情况下,如果只能有轨道(δ)和(β),则它们比轨道(a)更为经济。根据这一点,当 ω_0 、 ω_r 、 T 和 $\tilde{\Lambda}_0 \cdot \Lambda_r$ 给定时[我们回顾,在所讨论的特别情况下角速度矢量的方向与 $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \cdot \Lambda_r)$ 的方向相同],运动的分析可按下列顺序进行:验证情况(δ)和(β),然后从运动(a)中选出一一种(其中两种同前述情况下一样)。

对于轨道(δ),应满足下列关系式:

$$\begin{aligned}\omega_r - \omega_0 &= \pm \frac{M_{\max}}{J} \tau_1, \\ \omega_r(T - \tau_1) + \omega_0 \tau_1 \pm \frac{M_{\max}}{J} \frac{\tau_1^2}{2} &= \delta,\end{aligned}$$

式中, τ_1 是以最大力矩运动的第一段的时间,可根据以下关系式求出:

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{2(\omega_r T - \delta)J}{M_{\max}}} \quad (6.94)$$

当旋转角 $\delta \geq \omega_r T$ [在等式的情况下,可能存在条件(6.93)且可能有沿这种轨道的运动] 和 $\omega_0 \neq \omega_r$ 时,如果没有更为经济的其它类型的轨道,则将旋转一个 $\delta + 2k\pi$ ($k=1, 2, \dots$) 的角度。

对于轨道(β),满足于类似的关系式:

$$\begin{aligned}\omega_r - \omega_0 &= \pm \frac{M_{\max}}{J} (T - \tau_3), \\ \omega_0 T \pm \frac{M_{\max}}{J} \frac{(T - \tau_3)^2}{2} &= \delta,\end{aligned}$$

式中, τ_3 是第一段自由运动的时间。 τ_3 可根据以下关系式求出:

$$\tau_3 = T - \sqrt{\frac{2(\delta - \omega_0 T)J}{M_{\max}}} \quad (6.95)$$

当 $\omega_0 T \geq \delta$ [在满足条件(6.93)的情况下,可能有等式]时,如果没有更为经济的其它类型的轨道,沿这一轨道的运动则应以 $\delta + 2k\pi$ ($k=1, 2, \dots$) 这样的角度进行。同样,如果所得 τ_3 为负,则应有旋转 $2\pi - \delta$ 这样一个角度或沿其它类型的轨道的运动。

就轨道(a)来说,我们有这样的关系式:

$$\begin{aligned}\omega_r - \omega_0 &= \pm \frac{M_{\max}}{J} (\tau_1 - \tau_2), \\ \pm \omega_0 T + \frac{M_{\max}}{J} T \tau_1 - \frac{M_{\max}}{J} \tau_1^2 - \tau_1 (\omega_0 - \omega_r) \\ &\quad - \frac{J}{2M_{\max}} (\omega_0 - \omega_r)^2 = \pm \vartheta,\end{aligned}$$

式中, $\tau_1 > 0$, $\tau_3 > 0$ 是以恒定的最大力矩运动的第一和第三段的时间。

这些关系决定 τ_1 和 τ_2 之值:

$$\left. \begin{aligned}\tau_1 &= \frac{T}{2} \pm \frac{(\omega_r - \omega_0)J}{2M_{\max}} \\ &\quad - \sqrt{\frac{T^2}{4} \pm \frac{TJ(\omega_r - \omega_0)}{2M_{\max}} \mp \frac{(\vartheta - \omega_0 T)J}{M_{\max}} + \frac{3J^2}{4M_{\max}^2} (\omega_0 - \omega_r)^2}, \\ \tau_2 &= \frac{T}{2} \pm \frac{(\omega_0 - \omega_r)J}{2M_{\max}} \\ &\quad - \sqrt{\frac{T^2}{4} \pm \frac{(\omega_r - \omega_0)JT}{2M_{\max}} \mp \frac{(\vartheta - \omega_0 T)J}{M_{\max}} + \frac{3J^2}{4M_{\max}^2} (\omega_0 - \omega_r)^2}.\end{aligned}\right\} \quad (6.96)$$

在这里,上面的符号相当于第一段具有正力矩(而第三段具有负力矩)的运动情况;与下面的符号对应的是相反的力矩作用。我们看到,(a)的第二个轨道不总是存在的。

例如,当 $\omega_0 = \omega_r = 0$ 时,仅有(6.96)的第一条轨道存在,因为对于第二条轨道, τ_1 和 τ_2 的值为负。当 $\omega_0 = \omega_r > 0$ 和 $\vartheta > \omega_0 T$ 时,也只存在有第一条轨道 ($\tau_2 < 0$),当 $\vartheta = \omega_0 T$ 时,只有自由运动的轨道(6.93),当 $\vartheta < \omega_0 T$ 时,第一条和第二条轨道同时兼有。当 ω_0 进一步增大时, τ_1 和 τ_2 逼近于 $\frac{1}{2} T$, 而当 $\omega_0 = \vartheta + \frac{T^2}{4} \frac{M_{\max}}{J}$ 时,它们等于 $\frac{1}{2} T$ 。当 $\omega_0 > \vartheta + \frac{T^2}{4} \frac{M_{\max}}{J}$ 时,解(6.96)形式上已失去意义(根中出现负值)。这表明,在这样的角速度界限下,用时间 T 旋转 ϑ 这样一个角度是不可能的。此时,将旋转

$\vartheta + 2k\pi$ ($k=1, 2, \dots$) 这样一个角度。

在任何情况下都存在有若干实现所需转弯的 (a) 类轨道。这种非单值性决定于如下两点: 首先, 有可能旋转 $\vartheta, 2\pi - \vartheta$ 和 $\vartheta + 2k\pi$ ($k=1, 2, \dots$) 这样一些角度, 它们可产生同样的空间转弯, 其次是两种可能的 (6.96) 轨道。为了求出最佳转弯, 总是应该考虑所有可能的轨道并从中选出最经济的。

这种非单值性仅仅在速度的边界条件为零 (6.64) 时是不存在的。在这种情况下, 正象上面所指出的, 只有一条轨道, 出现 $\tau_1 = \tau_2$ 这样的等式并以 $\vartheta < \pi$ 这样的角度进行最佳转弯。正是这样的情况具有实际意义, 因此我们较为详细地讨论它。在这样运动的情况下, 首先以最大控制力矩 (其方向与偏差四元数 $\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_\pi$ 相同) 加速到角速度

$$\omega = \frac{TM_{\max}}{2J} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\vartheta J}{T^2 M_{\max}}} \right), \quad (6.97)$$

而角速度根据给定的转弯时间确定, 之后, 随之出现运动时间为

$$T \sqrt{1 - \frac{4\vartheta J}{T^2 M_{\max}}}$$

的自由运动段, 再后是以反向最大力矩作用的制动段。实际上, 给定的往往不是转弯时间 T , 而是转弯的角速度 (6.97)。如果这个时候控制力矩以开关函数

$$M_i = M_i(\omega_{Ei} - \Omega_{ki}) \quad (i=1, 2, 3) \quad (6.98)$$

[式中, Ω_{ki} 为修正角速度 (6.37)] 的形式给出, 则可看到, 控制 (6.98) 恰恰就实现了这里所讨论的球对称体的最佳控制。这就阐明了第五章中提出的四元数分量控制近似于最佳的这一结论。

§ 6.7 补充说明

I. 我们扼要地讨论一下 § 6.4 中所引用的假设。其中最简单的一个是假设 (2)。这一节中所进行的研究已经证明, 对于每个给定的 Λ_z 来说, 可能存在一类或若干类实现这一运动的轨道。根据这一点, Λ_z 决定一个或若干个量 p_{E0} 。实际上, 在任一有界域

内都有一条轨道是最佳的(考虑到充分的最佳条件),因此,实际上 Λ_{Σ} 唯一地决定矢量 \mathbf{p}_{E0} 。但是,我们没能找到使矢量 \mathbf{p}_{E0} 同四元数 Λ_{Σ} 相对应的一种算法。

假设(3)比较复杂。从两种可能的运动中选择一种的这个假设就是,在运动过程中,矢量 $\mathbf{p}_E(t)$ 可能改变其符号(就是说,可能由一个双重值转换为另一个双重值)。如果容许这种可能性,则可证明,从一值到另一值的这种转换只能在矢量 \mathbf{p}_E 位于座标平面时才能发生。

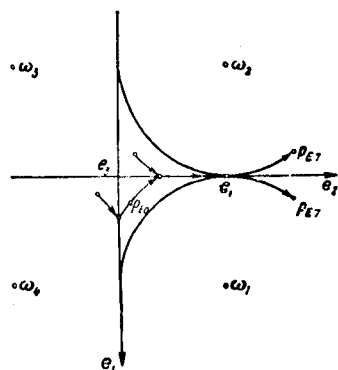


图 6.18

在这种情况下,当矢量 \mathbf{p}_E 沿座标平面运动时(见图 6.18)就可能有滑动状态的运动。这种运动的角速度将等于 $\omega_{\Sigma n}$ 。这一段的长度依矢量 \mathbf{p}_E 在座标平面上的位置而定并且不超过 $\frac{\pi}{4}$, 因为,这种滑动状态一直继续到矢量 \mathbf{p} 到达点 C_1 为止。这种情况下速度为 $\omega_{\Sigma n}$ 的运动可能同另一种运

动相接。可能的轨道数目由于出现新类型的轨道将有所增多[运动(6.50)作为轨道的一段包括在这些新轨道中]。下面 13 条轨道就是这样的运动(在这里我们利用构成四元数(6.48)~(6.50)来表示):

$$\begin{aligned} & \Lambda_{\Sigma 1} \circ \Lambda_1, \quad \Lambda_{\Sigma 1} \circ \tilde{\Lambda}_2, \quad \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1}, \quad \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1} \circ \Lambda'_1, \\ & \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1} \circ \tilde{\Lambda}_2, \quad \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1}, \quad \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1} \circ \Lambda'_1, \\ & \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1} \circ \tilde{\Lambda}_2, \quad \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1}, \quad \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1} \circ \Lambda'_1, \\ & \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1} \circ \tilde{\Lambda}_2, \quad \Lambda_{\Sigma 1} \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_5, \quad \Lambda_{\Sigma 1} \circ \tilde{\Lambda}_2 \circ \Lambda_6. \end{aligned}$$

所有这些类型的轨道使我们能够通过合成四元数 Λ_{Σ} 和矢量 \mathbf{p}_E 的运动条件单值地确定各分旋转。例如,在轨道 $\Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{\Sigma 1} \circ \Lambda'_1$ 上,它的段数超过三段,角度 $\theta_{\Sigma 1}$ 和 θ_1 是以下述条件相联系的:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \vartheta_{x1} \right) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\vartheta_1}{2} + \frac{\pi}{6} \right)$$

(这一条件的涵义可从图 6.18 中看出)。此外,还有许多在各分旋转中间既有旋转 Λ_{x1} , 也有旋转 Λ_{y1} 的轨道。就这样一类轨道来说, 各分旋转不是在任何情况下都可确定的。我们指出这样一些轨道, 对于这些轨道, 所有各分旋转都可单值地确定:

$$\Lambda_{x1} \circ \Lambda_{y1}, \quad \Lambda_1 \circ \Lambda_{x1} \circ \Lambda_{y1}, \quad \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{x1} \circ \Lambda_{y1}, \\ \Lambda_3 \circ \Lambda_4 \circ \Lambda_1 \circ \Lambda_{x1} \circ \Lambda_{y1}.$$

在这里所说的全部运动情况下, 都进行了定量研究。作出了各类轨道的解的存在区域, 这些区域迭加在矢量 p_E 在域 \mathcal{A}_n 中和沿分隔线运动时所存在的区域以及在 § 6.4 中讨论过的区域。计算结果表明, 所有这些轨道都比 § 6.4 中所考虑的轨道“长”。有时看起来, 这种轨道的运动时间较控制 (6.37) 作用下的时间长。这样一来, 假设 (3) 的正确性就为所进行的研究证实了。

假设 (1) 看来是最复杂的和最不明显的。如果假定, 表达式 (6.44) 中的函数 $\operatorname{sign}(0)$ 没有零值, 则不可能有速度为 ω_{y1} 的运动。这时, VIII~XIV 类轨道便消失并出现许多为保存下来的轨道所覆盖的区域。所以, 为使任何一点 (矢量 Λ_x 的终端位置) 都有最佳控制, 在函数 $\operatorname{sign}(0)$ 的数值中间必须容许有零值。同理 $\operatorname{sign}(0)$ 这一函数不存在值 $+1$ 或 -1 导致可能的运动的减少, 因而出现没有“最佳”解的区域。但实际上很难理解: 矢量 p_E 运动时, 函数 $\operatorname{sign}(0)$ 之值怎样进行转换?

假设 (3) 使我们仅能讨论矢量 Λ_x 的终点所在的一个半球面。与反向旋转对应的是具有反方向的四元数 Λ_x 。

可以看出, 矢量 p_E 的第二个值实现的运动应该对应于反向旋转 $\tilde{\Lambda}_x$, 就是说, 旋转将以符号相反的角速度进行。但是, 就是这个运动, 如果在另一个半球面上讨论它, 则将完全象假设 (3) 中预言的那样显现出来。

II. 我们证明, 平均旋转角等于 $\frac{2\pi}{3}$ 时, XII 类轨道变成等

价于 VIII 和 IX 类轨道。为此, 我们首先研究 IX 类轨道的四元数

$$\Lambda_2 = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2,$$

并根据 (6.54) 和 (6.56) 代入各分四元数的值。

进行乘法, 便得到合成四元数的分量:

$$\begin{aligned}\lambda_{20} &= \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \cos \frac{\vartheta_2}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2}, \\ \lambda_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2}, \\ \lambda_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2}, \\ \lambda_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2}.\end{aligned}$$

现在, 我们将在所得四元数的右边乘以四元数 $\Lambda_{\varphi 2}$ [根据 (6.56)]。经必要的变换之后, 它化为下列形式:

$$\Lambda_2 = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2},$$

$$\begin{aligned}\lambda_{20} &= \cos \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta_2}{2} \right), \\ \lambda_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ &\quad + \sin \left(\frac{\vartheta_2}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} - \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \right) \right], \\ \lambda_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\vartheta_2}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} + \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{23} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 1}}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\vartheta_2}{2} \right).\end{aligned}$$

在这里如假定 $\vartheta_{\varphi 1} = 0$, 则得 VIII 类轨道的合成四元数:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\Sigma} &= \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2}, \\ \lambda_{20} &= \cos \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2}, \\ \lambda_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2}, \\ \lambda_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2}, \\ \lambda_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \cos \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_{\varphi 2}}{2}.\end{aligned}$$

可以看出, 如果在 $\Lambda_{\Sigma} = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2}$ 的表达式中假定 $\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$, 则它与 $\Lambda_{\Sigma} = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2$ 的表达式完全相同, 在上一表达式中应将角 $\vartheta_{\varphi 1}$ 换成角 $\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}$ 。可以确信, 在角 ϑ_2 这样的数值下, 轨道 $\Lambda_{\Sigma} = \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2}$ 可以转换为轨道 $\Lambda_{\Sigma} = \Lambda_{\varphi 1} \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_{\varphi 2}$ 。

这样, 就可证明, 在 $\vartheta_2 = \frac{2\pi}{3}$ 时, 等式

$$\begin{aligned}\Lambda_{\varphi 1}(\vartheta_{\varphi 1}) \circ \Lambda_2(\vartheta_2) \circ \Lambda_{\varphi 2}(\vartheta_{\varphi 2}) \\ = \Lambda_{\varphi 1}(\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2}) \circ \Lambda_2(\vartheta_2) \\ = \Lambda_2(\vartheta_2) \circ \Lambda_{\varphi 2}(\vartheta_{\varphi 1} + \vartheta_{\varphi 2})\end{aligned}$$

成立。

主 要 符 号

\mathbf{H} ——超复数空间;

$\mathbf{I}, \mathbf{E}, \mathbf{E}', \mathbf{E}''$ ——三维空间中的正交基;

i_1, i_2, i_3 ——超复数单位; 基 \mathbf{I} 的单位矢;

e_i, e'_i, e''_i ——基的单位矢;

$\Lambda, \mathbf{M}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{N}$ ——四元数;

$\lambda_i, \mu_i, r_i, s_i, \rho_i, v_i$ ——四元数分量;

scal, vect——四元数标量和矢量部分的符号;

$\lambda, \mu, r, s, \rho, v$ ——矢量; 四元数的矢量部分;

$\tilde{\Lambda}, \tilde{\mathbf{M}}$ ——共轭四元数;

$\Lambda^{-1}, \mathbf{M}^{-1}$ ——逆四元数;

$\|\Lambda\|, \|\mathbf{M}\|$ ——四元数的范数;

$|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|} = \Lambda$ ——四元数的模(张量);

ϑ, ζ ——角和四元数的单位矢;

$\Delta\Lambda, \Delta\mathbf{N}$ ——无限小变换的四元数;

Λ_E, R_E ——基 \mathbf{E} 上的四元数映象;

Λ_0, Λ_r ——四元数的初始值和终止值;

Λ_z ——合成四元数;

ϑ_z, ζ_z ——角和合成四元数的单位矢;

$\theta = 2\zeta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ ——有限旋转矢量;

$\Theta = \vartheta\zeta$ ——真实旋转矢量;

Θ^* ——视在旋转矢量;

C_I, C_E ——常值四元数;

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ——矢量 ζ, ζ_z 的方向余弦;

a, b, c, d, r, m ——矢量;

- $a = |\mathbf{a}|$ ——矢量的模;
 $\boldsymbol{\omega}$ ——角速度矢量;
 $\mathbf{r}_E, \mathbf{a}_E, \boldsymbol{\zeta}_E$ ——基 E 上的映象矢量;
 r_{iE}, ω_{iE} ——映象 $\mathbf{r}_E, \boldsymbol{\omega}_E$ 的矢量分量;
 ω_i, Ω_i —— $\boldsymbol{\omega}$ 在固连基和固定基 E 和 I 的分量 (投影);
 $\boldsymbol{\omega}_E, \boldsymbol{\omega}_I$ —— $\boldsymbol{\omega}$ 在基 E 和 I 的映象;
 $\boldsymbol{\varepsilon}$ ——单位矢量;
 $\boldsymbol{\omega}_m, \boldsymbol{\omega}_{gl}, \boldsymbol{\omega}_{\infty}$ ——角速度的极限矢量;
 $\Lambda_m, \Lambda_{gl}, \Lambda_{\infty}$ ——以极限速度旋转的四元数;
 $\mathbf{N}(t)$ ——运动学方程 (其中包括具有单位初始条件的) 的四元数 (特解);
 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}$ ——正交矩阵;
 \mathbf{A}^T ——转置阵;
 \mathbf{A}^{-1} ——逆矩阵;
 $\mathbf{R}, \mathbf{T}, \mathbf{I}, \mathbf{E}$ ——列矩阵;
 $\mathbf{1} = \|\delta_{ij}\|$ ——单位矩阵 (其中包括二维阵);
 $\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}$ ——无限小变换矩阵;
 ϑ ——矩阵 \mathbf{A} 的旋转角;
 λ_k ——矩阵 \mathbf{A} 的特征值;
 \mathbf{U}, \mathbf{R} ——二维单式矩阵;
 u, v ——二维复数空间的元素;
 \mathbf{U}^* ——同矩阵 \mathbf{U} 复数共轭矩阵;
 $\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^{*T}$ ——同矩阵 \mathbf{U} 埃尔米特共轭矩阵;
 $\Delta \mathbf{U}$ ——无限小变换矩阵;
 p_1, p_2, p_3 ——泡里自旋阵;
 $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}_E, \boldsymbol{\Omega}_I$ ——角速度的三维矩阵;
 $\mathbf{V}, \mathbf{V}_E, \mathbf{V}_I$ ——角速度的二维单式矩阵;
 $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$ ——回量 (单位矢量);
 ϑ, φ, ψ ——欧拉角;

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \dots$ ——球面上的点;

h, τ ——积分步长和步长内的时间;

$\Phi = \int_0^t \omega dt$ ——总旋转角;

g ——按总旋转角为自变量的步长;

$\chi = \frac{g_{cp}}{\varepsilon}$ ——系数;

W, T, V ——里雅普诺夫函数;

$\Omega_{\kappa i}$ ——修正速度;

\mathcal{H} ——哈密顿函数;

ψ_i ——对应于 λ_i 的辅助函数;

φ_i ——对应于 ω_i 的辅助函数;

J_1, J_2, J_3 ——刚体的主中心惯性矩;

\mathbf{M} ——外加控制力矩;

ξ_i ——姿态角传感器的敏感轴;

\mathbf{M}, Ξ_E, Ξ_I ——动力学问题和运动学问题中容许控制区域;

$\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_m$ ——球面上的区域;

\circ, \cdot, \times ——分别为四元数乘法、标量乘法和矢量乘法的符号;

ε ——测量角速度的量化量;

i ——虚数单位。

参 考 资 料

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., Изд-во «Наука», 1969.
2. Бежко А. П., Бранец В. Н., Захаров Ю. М., Шмыглевский И. П., Применение кватернионов в теории конечного поворота твердого тела. «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 1.
3. Березин И. С., Жидков Н. Б., Методы вычислений, I и II. М., Физматгиз, 1959.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
5. Боданский Е. Д., Фурман В. Д., О погрешностях численного интегрирования кинематических уравнений Пуассона. «Космические исследования», 1970, VIII, вып. 6.
6. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. М., Изд-во «Наука», 1966.
7. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П., Кинематические задачи ориентации во вращающейся системе координат. «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 6.
8. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П., Применение кватернионов в управлении угловым положением твердого тела. «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 4.
9. Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, ч. II. М., Гостехиздат, 1945.
10. Воронов А. А. и др., Цифровые аналоги для систем автоматического управления. М., Изд-во АН СССР, 1960.
11. Вычислительная техника. Справочник под ред. Г. Д. Хаски и Г. А. Корна, I и II, перев. с англ. М.—Л., Изд-во «Энергия», 1964.
12. Ганкель Г., Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием, перев. с нем. Казань, изд. Казанского университета, 1912.
13. Гарбузов А. Р., Погрешности преобразования координат на плоскости поворотом осей цифровым дифференциальным анализатором. В сборнике «Автоматика и телеинформационные системы». М., Изд-во «Наука», 1965.
14. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
15. Гилмор Дж. П., Фелдман Дж., Гироскоп с обратной связью по моменту для бескарданной системы, перев. с англ. В сборнике переводов «Вопросы ракетной техники», 1970, № 9.
16. Голдстейн Г., Классическая механика, перев. с англ. М., Гостехиздат, 1957.

17. Гробов В. А., Коцюба А. В., О применении параметров Кейли — Клейна при исследовании квазипрецессионного движения свободного твердого тела. «Прикладная механика», 1971, VII, вып. 7.
18. Гурман В. И., Лавровский Э. К., Сергеев С. И., Оптимальное управление ориентацией осесимметричного вращающегося космического аппарата. «Космические исследования», 1970, VIII, вып. 8.
19. Диментберг Ф. М., Винтовое исчисление и его приложения в механике. М., Изд-во «Наука», 1965.
20. Диментберг Ф. М., Севостьянова Е. Г., К теории конечных перемещений твердого тела. «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1969, № 2.
21. Зоммерфельд А., Механика, перев. с нем. М., ИЛ, 1947.
22. Инерциальные системы без гиросtabilизированной платформы (обзор), перев. с англ. В сборнике переводов «Вопросы ракетной техники», 1967, № 1.
23. Ишлинский А. Ю., Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
24. Каляев А. В., Теория цифровых интегрирующих машин и структур. М., Изд-во «Советское радио», 1970.
25. Каляев А. В., Численные методы интегрирования по Стильтесу в цифровых интегрирующих машинах. «Кибернетика», 1966, № 2.
26. Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, I и II, перев. с нем. М.—Л., ГТТИ, 1933—1934.
27. Кошляков В. Н., О применении параметров Родрига — Гамильтона и Кейли — Клейна в прикладной теории гироскопов. «Прикладная математика и механика», 1965, 29, вып. 4.
28. Лагалли М., Векторное исчисление, перев. с нем. М., ОНТИ, 1936.
29. Левн-Чивита Т., Амальди У., Курс теоретической механики, II, ч. 2, перев. с итал. М., ИЛ, 1951.
30. Летов А. М., Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., Физматгиз, 1962.
31. Лурье А. И., Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
32. Майоров С. А., Новиков Г. И., Малогабаритные вычислительные машины. М., Изд-во «Машиностроение», 1967.
33. Майоров Ф. В., Электронные цифровые интегрирующие машины. М., «Машгиз», 1962.
34. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
35. Мэтьюс Ф. Б., Тейлор Г. Р., Испытания бесплатформенной инерциальной навигационной системы, перев. с англ. В сборнике переводов «Вопросы ракетной техники», 1970, № 8.
36. Неслуховский К. С., Цифровые дифференциальные анализаторы. М., Физматгиз, 1963.
37. Николаев И. А., О сохранении устойчивости по Ляпунову при моделировании линейных систем дифференциальных уравнений на ЦИМ. «Изв. вузов. Приборостроение», 1968, № 8.
38. Оттен, Инерциальные навигационные системы без гиросtabilизированной платформы, перев. с англ. В сборнике переводов «Вопросы ракетной техники», 1967, № 12.

39. Парс Л. А., Аналитическая динамика, перев. с англ. М., Изд-во «Наука», 1971.
40. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1961.
41. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
42. Раушенбах Б. В., Об измерении углов ориентации инерциальными датчиками. «Космические исследования», 1971, IX, вып. 5.
43. Саваж П. Г., Новое решение второго приближения для вычисления ориентации бескарданной инерциальной системы, перев. с англ. В сборнике переводов «Механика», 1968, № 1.
44. Синг Дж. Л., Классическая динамика, перев. с англ. М., Физматгиз, 1963.
45. Токарь Е. Н., Возможные принципы ориентации космического аппарата относительно вращающейся системы координат. «Космические исследования», 1966, IV, вып. 3.
46. Цифровые дифференциальные анализаторы. Сборник переводов. М., ИЛ, 1959.
47. Шилейко А. В., Цифровые модели. М., Изд-во «Энергия», 1964.
48. Bortz J. E., A New Mathematical Formulatin for Strap-down Inertial Navigation. «IEEE Trans. Aerosp. and Electr. Systems», 1971, No. 1.
49. Brand L., Vector and Tensor Analysis. New York, J. Wiley, London, Chapman and Hall, 1948.
50. Childs D. W., Tapley B. D., Fowler W. T., Suboptimal Attitude Control of a Spin-stabilized Axisymmetric Spacecraft. «IEEE Trans. Automat. Contr.», 1969, 14, No. 6.
51. Crubin C., Derivition of the Quaternion Scheme Via the Euler Axis and Angle. «Internat. J. Control», 1968 8, No. 3.
52. Dickinson, Comparision of Digital Differential Analyzer and General Purpose Equipment in Guidance Systems. «Communications and Electronics», 1961, 1, No. 52.
53. Garrad W. L., A Method for Suboptimal Stabilization of Spacecraft Angular Velocity. «Internat. J. Control», 1968 8, No. 3.
54. Hamilton W. R., Elements of Quaternions. Chelsea Publishing Company, New York, 1969.
55. Hamilton W. R., Lectures on Quaternions. Dublin, Hodges and Smith, 1853.
56. Ickes B. P., A New Method of Performing Digital Control System Attitude Computation Using Quaternions. «AIAA Journals», 1970, 8, No. 1.
57. Mason W. L., Wedekind D. E., Prediction and Measurement of Strap-down Inertial Measurement Unit Performance on Lunar Mission. AIAA paper, No. 1028, 1970.
58. Mc Kern R., Gilmore J., A Redunant Strap-down Inertial System Mechanizatton. SIRU AIAA paper, No. 1027, 1970.
59. Mitchell E. L., Rogers A. E., Quaternion Parameters in the Simulation of a Spinning Rigid-Body. «Simulation», New York, 1968.

60. Mortensen R., A Globally Stable Linear Attitude Regulator. «Internat. J. Control», 1968, 8, No. 3.
61. Porcelli G., Large-angle Attitude Control of a Spinning Space Body. «IEEE Trans. Automat. Contr.», 1969, 14, No. 6.
62. Quasins G. R., Strap-down Inertial Systems. «Space/Aeronautics», 1963, 40, No. 3.
63. Robinson A. C., On the Use of Quaternions in Simulation of Rigid-body Motion. WADD Techn. report, No. 58-17, 1957.
64. Smyth R. K., Guidance and Control 1968. AIAA paper, No. 72, 1969.
65. Weber H. J., Inertial Guidance System Uses Digital Integrator. «Space/Aeronautics», 1958, 30, No. 5.
66. Whittaker E. T., Analytische Dynamic der Punkte and Starren Körper. Berlin, Springer, 1924.
67. Wilcox J. C., A New Algorithm for Strapped-down Inertial Navigation. «IEEE Trans. Aerosp. and Electr. Systems», 1967, 3, No. 5.

[General Information]

书名=四元数在刚体定位问题中的应用

作者=(苏) . . 勃拉涅茨 . . 什梅格列夫斯基著
梁振和译

页数=262

SS号=11072274

DX号=

出版日期=1977年08月第1版

出版社=国防工业出版社

译序

前言

第一章 四元数及其性质

- 1.1 四元数代数
- 1.2 四元数在球面上的表示
- 1.3 旋转变换
- 1.4 球面几何

第二章 刚体的有限转动理论

- 2.1 正交变换
- 2.2 正交变换的四元数乘法的表示式
- 2.3 基的变换
- 2.4 不变矢量的分量变换。超复数映像
- 2.5 旋转运算的不变性。罗德里格-哈密顿参数
- 2.6 转动的相加
- 2.7 罗德里格-哈密顿参数同其它运动学参数的关系

第三章 运动学方程

- 3.1 无限小变换。角速度矢量
- 3.2 运动学方程的推导
- 3.3 其它参数的运动学方程
- 3.4 运动学方程的研究
- 3.5 特殊形式的运动学方程的解
- 3.6 运动学方程的形式解

第四章 运动学方程的近似积分和数值积分

- 4.1 数值法的建立
- 4.2 非规范化四元数的运动学方程。范数修正
- 4.3 范数修正的数值法
- 4.4 定步长情况下数值法的误差
- 4.5 变步长的数值积分法
- 4.6 量化误差
- 4.7 泊松方程中模和角的稳定

第五章 四元数在刚体运动控制问题中的应用

- 5.1 控制信号与运动学参数的关系
- 5.2 惯性坐标系中定位的运动学问题
- 5.3 旋转坐标系中定位的运动学问题
- 5.4 定位的动力学问题
- 5.5 例

第六章 刚体的最佳空间转弯

- 6.1 运动学最佳转弯问题的提出
- 6.2 运动学最佳转弯问题的解
- 6.3 角速度矢量的模有界时的最佳控制
- 6.4 角速度矢量的分量有界时的最佳控制
- 6.5 动力学最佳转弯问题的提出
- 6.6 控制力矩的模有界时，对于球对称刚体动力学最

佳转弯问题的解的特殊情况

- 6.7 补充说明

主要符号

参考资料